Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **4 (1949)**

Heft 1

PDF erstellt am: **07.07.2024**

Aufgaben

Aufgabe 23. Bestimme den Wert des Quotienten

$$q = \frac{x^2 + 2x - 4y + 1}{y^2 + 4y - 6x + 1}$$

im Punkte $1|1$, wenn man auf der Kurve mit der Gleichung

$$x^2 y - 2x^2 - 2xy + y^2 + 4x - y - 1 = 0$$

in den Punkt hineingeht. P. BUCHNER.

Lösung: Durch die Transformation $x = X + 1$, $y = Y + 1$ geht der Punkt $1|1$ in den Ursprung über und die Kurvengleichung erhält die Form

$$X^2 Y - X^2 + Y^2 = 0.$$

Diese Kurve ist eine rationale C_3 mit dem Knotenpunkt im Ursprung. Der Quotient q wird durch die Transformation vereinfacht zu

$$q = \frac{X^2 + 4X - 4Y}{X^2 + 6Y - 6X}.$$

Nun läßt sich die C_3 rational durch einen Parameter darstellen. Man setzt $Y = mX$ und bestimmt die Koordinaten des dritten Schnittpunktes der Geraden mit der C_3. Dies führt zur Darstellung $X = (1 - m^2)/m$, $Y = 1 - m^2$. Durch diese Substitution wird

$$q = \frac{5m + 1}{m(m-2)(m+3)}.$$

Für $X = Y = 0$ ist $m = \pm 1$ und man erhält $q(+1) = -3/2$, $q(-1) = -2/3$.

A. AESCHLIMANN (Burgdorf).

Weitere Lösungen sandten ein: L. DESCLOUX (Fribourg), L. KIEFFER (Luxemburg), K. RIEDER (Riehen).

Die C_3 ist eine Strophoide, der Knoten hat zueinander senkrechte Tangenten.

K. RIEDER untersucht im Anschluß an seine Lösung das Verhalten von q, wenn man als Bahnkurven Kreise wählt, die im Nullpunkt den den I. Quadranten halbierenden Strahl $Y = X$ berühren. Nimmt man diesen Strahl als Achse eines Polarkoordinatensystems (ϱ, ω), so ist $\varrho = 2\lambda \sin\omega$ die Gleichung eines solchen Kreises. Dabei sei der Radius λ positiv bzw. negativ, je nachdem der Mittelpunkt im II. oder IV. Quadranten liegt. Wegen $X = \varrho \cos[(\pi/4) + \omega]$, $Y = \varrho \sin[(\pi/4) + \omega]$ wird

$$q = \frac{\lambda(1 - \sin 2\omega) - 4\sqrt{2}}{\lambda(1 + \sin 2\omega) + 6\sqrt{2}},$$

somit für $\omega = 0$ oder $\pm\pi$

$$\lim q = \frac{\lambda - 4\sqrt{2}}{\lambda + 6\sqrt{2}}.$$

Je nach der Wahl des Kreises kann also q jeden Wert zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen. Um z. B. den Grenzwert $-3/2$ zu erhalten, ist $\lambda = -2\sqrt{2}$ zu setzen, und das ist der Krümmungsradius im Doppelpunkt der C_3.

Aufgabe 19. Einem Rotationsparaboloid werden zwei Kugeln mit den Radien R und r einbeschrieben, die sich berühren. Aus dem die beiden Kugeln verbindenden Stück des Paraboloids sowie den beiden Kugelhauben wird eine Eifläche gebildet.

Beweise für das Volumen und die Oberfläche die Formeln:

$$V = \frac{\pi}{12}(R+r)(17R^2 - 14Rr + 17r^2)$$
$$O = \frac{\pi}{3}(13R^2 - 2Rr + 13r^2) \qquad \left(r \geqq \frac{R}{3}\right)$$

E. TROST.

Lösung: a) Die Gleichung des Paraboloids sei $y^2 + z^2 = 2px$. Es seien x_1, x_2 die Abszissen der Berührungspunkte der Kugeln mit der Fläche. Aus $R + r = x_2 - x_1$ und $p(p + 2x_1) = r^2$, $p(p + 2x_2) = R^2$ (die Parabel hat die konstante Subnormale p!) folgt $x_2 - x_1 = (R^2 - r^2)/(2p)$, also $p = (R - r)/2$. Damit läßt sich das Volumen des Körpers leicht durch r, R ausdrücken.

b) Die Fläche der Paraboloidzone erhält man wohl am einfachsten, wenn man als Flächenelement den Streifen längs des Berührungskreises einer eingeschriebenen Kugel wählt. Ist ϱ deren Radius, so wird die Zone gleich $2\pi\int\varrho\,dx$ oder wegen $\varrho^2 = p(p + 2x)$

$$\frac{2\pi}{p}\int\varrho^2\,d\varrho = \frac{2\pi}{3p}(R^3 - r^3).$$

Zusammen mit den beiden Kugelhauben ergibt das, wenn p wieder durch $(R - r)/2$ ersetzt wird, den angegebenen Ausdruck. Aus $R/r = 1 + (2p/r)$ folgt, da nach den benützten Formeln r mindestens gleich dem Scheitelkrümmungsradius p des Flächenmeridians sein muß, die Bedingung $R/r \leqq 3$. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht.

Weitere Lösungen gingen ein von: L. KIEFFER (Luxemburg), K. RIEDER (Riehen), E. ROTHMUND (Zürich).

Aufgabe 22: Das Gleichungssystem

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{144} + \dfrac{y^2}{49} + \dfrac{z^2}{9} = 1 \\ -7x + 24y - 67{,}2 = 0 \\ 15x - 40z - 72 = 0 \end{array}\right.$$

ist graphisch aufzulösen. W. LÜSSY.

Um weitere Zeichnungen des von einer Geraden durchstoßenen dreiachsigen Ellipsoids zu verhindern, geben wir hiermit die *Lösung.* Wählt man folgende Maßstäbe:

x-Achse: 5 cm $\triangleq$ 12
y-Achse: 5 cm $\triangleq$ 7
z-Achse: 5 cm $\triangleq$ 3,

so handelt es sich um den Schnitt einer Geraden mit einer Kugel, der auf einem Blatt vom Format A4 mit leichter Mühe so bestimmt werden kann, daß die abgelesenen Koordinaten einen Fehler von höchstens 0,01 aufweisen.

Aufgabe 32: Avendosi (nello spazio ordinario) quattro sfere Σ_i e quattro punti P_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ si domanda di condurre per ciascuno dei punti P_i un piano π_i in modo che se Γ_i è la sezione di π_i con Σ_i, i quattro cerchi Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 appartengano ad una stessa sfera. A. LONGHI.

Lösung: S_i sei der Mittelpunkt von Σ_i. Nun lege man um P_i diejenige Kugel, welche Σ_i orthogonal schneidet. Dies für alle vier Indizes. Zu den so erhaltenen vier Kugeln konstruiere man das Potenzzentrum S als Schnitt der Potenzebenen von drei Paaren jener Kugeln. Dann ist π_i die Ebene durch P_i normal zu SS_i.

Beweis: $\mathfrak{x}$ bedeute einen dreidimensionalen Vektor vom Koordinatenursprung nach dem Punkt X, und $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}$ sei das skalare Produkt von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$. Ist nun S der Mittelpunkt einer Kugel, auf der jene vier Schnittkreise Γ_i liegen, und ist r ihr Radius, dann lautet die Gleichung dieser Kugel:

$$(\mathfrak{x} - \mathfrak{s})^2 = r^2.$$

Ist ferner r_i der Radius von Σ_i, dann kann die Gleichung von π_i geschrieben werden:

$$(\mathfrak{x} - \mathfrak{s})^2 - (\mathfrak{x} - \mathfrak{s}_i)^2 = r^2 - r_i^2 .$$

Da P_i auf dieser Ebene liegt, so gilt auch:

$$(\mathfrak{s} - \mathfrak{x}_i)^2 = r^2 + (\mathfrak{x}_i - \mathfrak{s}_i)^2 - r_i^2 .$$

Ist $\mathfrak{s}$ variabel, dann ist dies die Gleichung einer Kugel um P_i, die durch S geht. Dies für alle vier Indizes. Verkleinert man die Radien dieser vier Kugeln so, daß sich die Quadrate der Radien je um r^2 vermindern, dann ist S immer noch ihr Potenzzentrum. Und da $(\mathfrak{x}_i - \mathfrak{s}_i)^2 - r_i^2$ das Quadrat der Länge der Tangente aus P_i an Σ_i ist, so schneidet jede der vier verkleinerten Kugeln die zugehörige Σ_i orthogonal.

Daraus ergibt sich die angegebene Konstruktion. A. STOLL, Zürich.

In einer durch diese Aufgabe angeregten Note[1]) betrachtet J.-P. SYDLER (Zürich) Folgen von Kugeln 1, 2, 3, von denen jede die folgende senkrecht schneidet. Bleiben die Mittelpunkte P_1, P_2, P_3 einer solchen «orthogonalen Kette» fest, während die Radien sich unter Erhaltung der Orthogonalität verändern, so bleibt auch die Potenzebene von 1 und 3 fest, denn sie steht senkrecht zu P_1P_3 und enthält P_2. Zur Lösung der Aufgabe werden vier orthogonale Ketten mit demselben Anfangsglied konstruiert: 1, 2, 3; 1, 2′, 3′; 1, 2″, 3″; 1, 2‴, 3‴. P_1 ist offenbar Potenzzentrum von 2, 2′, 2″, 2‴ und die Potenzebenen von 3 bzw. 3′, 3″, 3‴ mit 1 gehen durch P_2 bzw. P_2', P_2'', P_2'''. Also liegen die Schnittkreise dieser Ebenen mit den entsprechenden Kugeln 3, 3′, 3″, 3‴ alle auf der Kugel 1.

Eine weitere Lösung sandte L. DESCLOUX (Fribourg).

Aufgabe 36. Man bestimme sämtliche Paare von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, die nur Primzahlen aus der Reihe 2, 3, 5 enthalten. G. BERGER und E. TROST.

Lösung: Wir notieren sogleich die Lösung (1; 2). Da zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen relativ prim sind und eine von ihnen gerade ist, bleiben nur die folgenden zehn Fälle zu betrachten übrig. (Im voraus sei bemerkt, daß m, n, p, q, r, s natürliche Zahlen bedeuten.)

1. $2^n = 3^m + 1$. Da $3^m + 1 \equiv 2$ oder $4 \pmod 8$, je nachdem m gerade oder ungerade ist, ist $n \leqq 2$, und man findet nur die Lösung (3; 4).

2. $2^n + 1 = 3^m$. Für ungerades m ist $3^m - 1 \equiv (-1)^m - 1 \equiv 2 \pmod 4$, also $n = 1$, so daß man die Lösung (2; 3) erhält. Für $m = 2p$ ist $2^n = (3^p + 1)(3^p - 1)$, also $3^p + 1$ eine Potenz von 2. Zufolge 1. ist dann $p = 1$, was die Lösung (8; 9) ergibt.

3. $2^n = 5^m + 1$. Da $5^m + 1 \equiv 2 \pmod 4$, ist $n = 1$. Wegen $m > 0$ gibt das keine Lösung.

4. $5^m = 2^n + 1$. Für ungerades m ist $5^m - 1 \equiv 4 \pmod 8$, also $n \leqq 2$. Man erhält die Lösung (4; 5). Für $m = 2p$ ist $(5^p - 1)(5^p + 1) = 2^n$, was nach 3. unmöglich ist.

5. $3^m 5^p = 2^n + 1$. Keine Lösung, weil $2^n \not\equiv -1 \pmod{15}$.

6. $2^n = 3^m 5^p + 1$. Da $2^n \equiv 1 \pmod{15}$, ist $n = 4q$, so daß $3^m 5^p = (2^{2q} + 1)(2^{2q} - 1)$. Wegen 5. ist $2^{2q} + 1$ eine Potenz von 3 oder 5 allein. Der erste Fall ist nach 2. ausgeschlossen; aus $2^{2q} + 1 = 5^r$ folgt nach 4. $q = 1$ und wir erhalten die Lösung (15; 16).

7. $2^m 3^p = 5^n + 1$. Da $5^n \equiv -1 \pmod{12}$, ist $n = 1$, und man erhält die Gleichung $2 \cdot 3^p = 5^n + 1$. $p = 1$ gibt die Lösung (5; 6). Wenn $p \geqq 2$, so ist $5^n \equiv -1 \pmod{18}$, also $n = 6q + 3$. Wegen $5^3 \equiv -1 \pmod 7$ erhält man $2 \cdot 3^p = (-1)^{2q+1} + 1 \equiv 0$ (mod 7), was unmöglich ist.

8. $5^n = 2^m 3^p + 1$. Da $5^n \equiv 1 \pmod 6$, ist $n = 2q$, und man erhält die Gleichung $2^m 3^p = (5^q + 1)(5^q - 1)$. Nach 3. ist $5^q + 1$ keine Potenz von 2, da es aber gerade ist, gilt $5^q + 1 = 2^r 3^s$. Nach 7. ist $q = 1$, was die Lösung (24; 25) ergibt.

---

[1]) *Quelques considérations sur les sphères*, siehe S. 1.

9. $3^n = 2^m 5^p + 1$. Wegen $3^n \equiv 1 \pmod{10}$ ist $n = 4q$, somit $2^m 5^p = (3^{2q} + 1)(3^{2q} - 1)$. Beide Faktoren auf der rechten Seite können nicht durch 5 teilbar sein, sonst wäre auch ihre Summe durch 5 teilbar. Einer von ihnen muß also eine Potenz von 2 sein. Nach 1. kann es der erste nicht sein, folglich ist $3^{2q} - 1 = 2^r$ und wegen 2. $q = 1$, so daß man die Lösung (80; 81) erhält.

10. $2^m 5^p = 3^n + 1$. Da $3^n \equiv -1 \pmod{20}$, ist $m = 1$. Für $p = 1$ hat man die Lösung (9; 10). Wird dagegen $p \geqq 2$ angenommen, so ist $3^n \equiv -1 \pmod{50}$, also $n \equiv 10 \pmod{20}$, so daß $2 \cdot 5^p = 3^{10+20r} + 1$. Wegen $3^{10} \equiv -1 \pmod{1181}$, wo 1181 Primzahl ist, hat man $2 \cdot 5^p = (-1)^{2r+1} + 1 \equiv 0 \pmod{1181}$, was unmöglich ist.

Es gibt somit genau die zehn Lösungen: (1; 2), (2; 3), (3; 4), (4; 5), (5; 6), (8; 9), (9; 10), (15; 16), (24; 25), (80; 81). ANDERS BAGER (Hjörring, Dänemark).

Eine weitere Lösung sandte L. DESCLOUX (Fribourg) ein.

Neue Aufgaben

49. Wir betrachten drei Vektoren mit demselben Ausgangspunkt O und den Längen a, b und c beziehungsweise. Es sei K das Parallelepiped mit Eckpunkt O, von dem die gegebenen Vektoren die Kanten, und H das Parallelepiped mit Eckpunkt O, von dem diese Vektoren die Höhen sind. Man beweise, daß das Produkt der Voluminhalte von H und K $(a\,b\,c)^2$ beträgt, und verallgemeinere diesen Satz mit Beweis auf n Dimensionen. G. PÓLYA (Stanford, USA.).

50. Lieu du centre ω d'un cercle tangent à l'ellipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ et admettant d'autre part, avec elle, deux tangentes communes parallèles entre elles.

Le point de contact M d'un tel cercle est le foyer d'une parabole bitangente à l'ellipse, le pôle de contact étant le point ω. J. HADAMARD (Paris).

51. Ist es möglich, eine Kreisscheibe in zwei zueinander fremde kongruente Punktmengen zu zerlegen?

(Ob man den Randkreis zur Kreisscheibe rechnet oder nicht, ist gleichgültig. Das einfachste ist, den Randkreis dazu zu rechnen.)

B. L. VAN DER WAERDEN (Laren, Holland).

52. Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque. Une droite variable passant par A coupe BC en E et CD en F, et soit I le point défini par la relation

$$(BCIE) = k. \qquad (k = \text{const})$$

1° Le lieu du point commun aux droites DE, IF est une conique (Γ). 2° La conique (Γ) passe par C, étant tangente en D à AD; elle passe encore par B, la tangente en ce point coupe CD en un point J tel que

$$(JDMC) = k,$$

M étant le point d'intersection des droites AB, CD.

3° La polaire du point commun aux droites BJ, AD est la droite BD.

GH. TH. GHEORGHIU (Timişoara, Rumänien).

53. Ein Parallelogramm mit den Seiten a und b und dem spitzen Winkel α kann auf zwei Arten zur Mantelfläche eines geraden Kreiszylinders zusammengerollt werden, je nachdem a oder b zum Umfang des Zylinders gewählt wird. Die entsprechenden Volumina der Zylinder sind

$$V_1 = \frac{F\,a}{4\pi} \qquad \text{bzw.} \qquad V_2 = \frac{F\,b}{4\pi}\,.$$

F ist die Fläche des Parallelogramms. Die Steigungswinkel der Schraubenlinien sind gleich α. A. HESS (Zürich).

54. Aus einem rechteckigen Stück Blech (a = Grundlinie, h = Höhe, $a > h$) soll ein längs einer Schraubenlinie geschweißtes Rohr von kreisrundem Querschnitt und

dem Umfang $u\,(h < u < a)$ hergestellt werden. Man berechne die Höhe H des Rohres.

Schneidet man von dem Blech an beiden schmalen Seiten rechtwinklige Dreiecke mit der Hypotenuse u und einer Kathete h ab, dann findet man

$$H = \frac{h}{u}\left(a - \sqrt{u^2 - h^2}\right).$$

Will man das Blech voll ausnützen, dann schneidet man nur an einem Ende ein Dreieck ab und fügt es am andern Ende wieder an. Dann wird

$$H' = \frac{h\,a}{u}.$$

Man kann auch das gegebene Blechstück in n kongruente Rechtecke mit den Seiten u und h zerlegen und diese n Stücke zu einem Rohr zusammenschweißen, allerdings nicht mehr längs einer Schraubenlinie. Dann wird

$$H'' = \frac{h\,a'}{u}, \qquad \text{worin} \qquad a' = n\,u.$$

Es ist $0 \leqq a - a' < u$ und somit $H'' \leqq H'$. A. Hess (Zürich).

55. Legt man durch die Ecken eines Dreiecks je n gerade Schnittlinien, so läßt sich leicht die maximale Anzahl der dadurch entstehenden Teile angeben (Aufgabe 39). Man ermittle deren minimale Anzahl. A. Stoll (Zürich).

56. In wie viele Gebiete wird die Ebene durch n Kreise zerlegt, die die maximale Anzahl reeller Schnittpunkte haben? C. Bindschedler (Küsnacht).

Berichte

VEREIN SCHWEIZERISCHER MATHEMATIKLEHRER

Société suisse des professeurs de mathématiques

52. Jahresversammlung in Chur, 9./10. Oktober 1948

Im Mittelpunkt der diesjährigen Generalversammlung standen die Vorträge zweier Professoren der Kantonsschule Chur. In seinem Vortrag über *Die Erdbebenwarte Chur* sprach Herr Alfred Kreis von seinen Erfahrungen beim Bau und Betrieb des Churer Seismographen, insbesondere auch von der Lösung verschiedener technischer Schwierigkeiten, bei denen der Referent initiativ beteiligt war. Sein Ruf als langjähriger und einflußreicher Forscher auf diesem Gebiet war nicht zuletzt ein Grund für den unerwartet starken Besuch unserer Veranstaltungen.

Bei den heute vielerorts aufgestellten Universalseismographen werden die Erschütterungen der Erde durch die Trägheit einer einzigen zirka 20 t schweren Masse registriert, und zwar so, daß jeder Erdstoß vom Seismographen in einen vertikalen, einen nord-südlichen und einen west-östlichen Bewegungsanteil zerlegt und dann komponentenweise aufgezeichnet wird. Die ersten Apparaturen dieser Art wiesen den Mangel auf, wegen der freien Aufhängung der Masse auch in Torsions- und Schaukelbewegungen zu geraten, wodurch natürlich die Seismogramme stark entstellt wurden. Die störenden Schaukelungen können, wie die mathematische Behandlung dieses Problems zeigt, dadurch vermieden werden, daß man den Schwerpunkt der Seismographenmasse mit der Schaukelungsachse zusammenfallen läßt.

Im weitern orientierte der Referent über die durch Temperaturschwankungen bedingten Nullpunktsveränderungen und deren Kompensation, ferner über die Astasierung. Man versteht darunter eine künstliche Vergrößerung der Schwingungszeit der Seismographenmasse mit dem Zweck, Resonanzerscheinungen zu vermeiden. Eine Reihe weiterer Fragen kamen bei der anschließenden Demonstration des in einem Keller der Kantonsschule eingebauten Churer Seismographen zur Sprache.