Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Band: 4 (1949)

Heft: 2

Artikel: Konstruktion zweier gleich großer regulärer Tetraeder, die einander zugleich ein- und umgeschrieben sind

Autor: Reuschel, Arnulf

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14316

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer

El. Math. Band IV Nr. 2 Seiten 25–48 Basel, 15. März 1949

Konstruktion zweier gleich großer regulärer Tetraeder, die einander zugleich ein- und umgeschrieben sind

(Fortsetzung)

4. *Projektive Besonderheit der betrachteten kongruenten regulären Möbiusschen Tetraeder*

Wenn ein Punkt P und eine Gerade g in der Ebene eines Dreiecks ABC so liegen, daß die Projektion des Punktes P aus jeder Ecke des Dreiecks auf die gegenüberliegende Seite und der Schnittpunkt der Geraden g mit dieser Seite die auf ihr liegenden Eckpunkte des Dreiecks harmonisch trennen, so sagt man, daß P und g in bezug auf das Dreieck ABC harmonisch liegen.

Jede Begrenzungsebene des einen Tetraeders und die zu der in ihr gelegenen Ecke des anderen Tetraeders gegenüberliegende Begrenzungsebene bilden ein Paar von Gegenflächen der beiden Möbiusschen Tetraeder. Die Gerade U_1V_2 ist die Schnittlinie der Ebene $B_1C_1D_1$ mit ihrer Gegenfläche $B_2C_2D_2$. An Hand der in Abb. 3 gezogenen Linien erkennt man, daß der Punkt A_2 und die Gerade U_1V_2 in bezug auf das Dreieck $B_1C_1D_1$ harmonisch liegen. Die in den übrigen Seitenwänden der beiden Tetraeder auftretenden Figuren sind mit Abb. 3 deckungsgleich. Aber auch in jeder Grundfläche, etwa $A_1B_1C_1$, liegen der in ihr befindliche Eckpunkt D_2 des anderen Tetraeders und die Schnittgerade mit der Gegenfläche $A_2B_2C_2$, das ist die Ferngerade der Grundebenen, in bezug auf das Dreieck $A_1B_1C_1$ harmonisch.

Die in Abb. 2 dargestellten gleich großen regulären Möbiusschen Tetraeder haben gegenüber zwei beliebigen Möbiusschen Tetraedern die besondere Eigenschaft, daß in jeder Begrenzungsebene, die in ihr gelegene Ecke des anderen Tetraeders und die Schnittgerade der Gegenfläche mit der betrachteten Begrenzungsebene in bezug auf das darin enthaltene Dreieck harmonisch liegen.

Durch eine (reelle) eineindeutige geradentreue Punkttransformation des Raumes, die kürzer projektive Punkttransformation oder auch Kollineation heißt[1]), werden die beiden gleich großen regulären Möbiusschen Tetraeder in allgemeinere Möbiussche Tetraeder umgewandelt. Hingegen bleibt die harmonische Lage eines Punktes und einer Geraden in bezug auf ein Dreieck bei jeder solchen geradentreuen Abbildung erhalten.

Die Eigenschaften geometrischer Gebilde, die bei allen projektiven Umformungen des Raumes unverändert bleiben, bilden den Gegenstand der projektiven Geometrie.

---

[1]) Eine sehr ansprechende Behandlung der geradentreuen Abbildungen der Ebene auf eine andere Ebene und des Raumes auf eine Ebene enthält E. Stiefel, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie* (Birkhäuser, Basel 1947); siehe insbesondere S. 113, 117, 125 und 132.

Die harmonische Lage eines Punktes und einer Geraden in bezug auf ein Dreieck ist eine solche rein projektive Beziehung.

Wir erkennen daraus, daß die gegenseitige Lage der beiden kongruenten regulären Möbiusschen Tetraeder nicht nur metrisch, sondern auch projektiv ausgezeichnet ist.

5. *Über die neunfache hyperboloidische Lage der betrachteten kongruenten regulären Möbiusschen Tetraeder*

Sind drei untereinander windschiefe Gerade gegeben, so bilden alle Geraden, die diese drei windschiefen Geraden schneiden, eine Erzeugendenschar einer Regelfläche (Strahlfläche) zweiten Grades oder, kürzer, eine Regelschar zweiten Grades. Sind die drei windschiefen Geraden zu einer Ebene parallel, so ist die entstehende Regelfläche ein hyperbolisches Paraboloid, sonst aber ein (allgemeines) einschaliges Hyperboloid.

Vier untereinander windschiefe Gerade liegen im allgemeinen nicht auf einer Regelfläche zweiten Grades. Trifft es aber zu, daß vier windschiefe Gerade einer Erzeugendenschar eines einschaligen Hyperboloids oder hyperbolischen Paraboloids angehören, so sagt man auch, daß sie sich in hyperboloidischer Lage befinden.

Um von vier Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 nachzuweisen, daß sie hyperboloidisch liegen, genügt es, wenn man drei Geraden t_1, t_2, t_3 angeben kann, von denen jede alle vier gegebenen Geraden trifft. Die Treffgeraden von t_1, t_2, t_3 bilden nämlich eine Regelschar zweiten Grades, und da g_1, g_2, g_3, g_4 solche Treffgeraden sind, so liegen sie demnach in dieser Regelschar und sind somit in hyperboloidischer Lage.

Die vier Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 gehören insbesondere einer Regelschar eines hyperbolischen Paraboloides an, wenn man zwei eigentliche Treffgerade t_1, t_2 der vier Geraden angeben und außerdem noch zeigen kann, daß diese vier Geraden zu einer Ebene parallel sind. Die vier Geraden treffen diese Ebene in Fernpunkten, und die Ferngerade t_3 der Ebene ist somit eine weitere Gerade, welche alle vier Geraden schneidet.

Der Nachweis, daß vier Gerade g_1, g_2, g_3, g_4 nicht hyperboloidisch liegen, kann so erbracht werden, daß man zeigt, daß es eine Gerade t gibt, die drei der gegebenen Geraden schneidet und nicht zugleich auch die vierte Gerade trifft. Denn diese drei Geraden, etwa g_1, g_2 und g_3, bestimmen eine Regelfläche zweiten Grades, auf der auch die Gerade t verläuft, die alle Erzeugenden jener Regelschar schneidet, der auch g_1, g_2, g_3 angehören. Die Gerade g_4 kann nun nicht zu dieser Erzeugendenschar gehören, da sie von t nicht getroffen wird. Da also g_4 nicht auf dem durch g_1, g_2, g_3 bestimmten einschaligen Hyperboloid oder hyperbolischen Paraboloid liegen kann, so haben die vier gegebenen Geraden keine hyperboloidische Lage.

Sind zwei beliebige, miteinander starr verbundene Tetraeder gegeben, so können den Eckpunkten A_1, B_1, C_1, D_1 des einen Tetraeders die Eckpunkte des anderen Tetraeders $A_2B_2C_2D_2$ noch auf 24 verschiedene Arten zugeordnet werden. Zeichnet man für jede solche Zuordnung die vier Verbindungsgeraden entsprechender Tetraederecken, so sagt man, daß die beiden vorgelegten Tetraeder n-fach hyperboloidisch liegen, wenn sich unter den 24 Geradenquadrupeln genau n in hyperboloidischer Lage befinden[1]).

---

[1]) Vgl. F. Schur, *Über besondere Lagen zweier Tetraeder*, Math. Ann. *19*, 429–432 (1881).

Zwei allgemeine Möbiussche Tetraeder liegen immer dreifach hyperboloidisch[1]). Ordnen wir nämlich den Eckpunkten A_1, B_1, C_1, D_1 des ersten Tetraeders der Reihe nach die Eckpunkte B_2, A_2, D_2, C_2 ... (1) des zweiten Tetraeders zu, so sind die in Abb. 5 als starke einfache Striche ausgeführten vier Verbindungsgeraden A_1B_2, B_1A_2, C_1D_2, D_1C_2 entsprechender Tetraederecken in hyperboloidischer Lage. Wir weisen dies dadurch nach, daß wir zeigen, daß jede der drei in der Figur durch Doppelstriche dargestellten Geraden A_1B_1, A_2B_2 und C_1D_1 (auch C_2D_2 könnte verwendet werden), die früher erwähnten vier Geraden trifft, da sie mit jeder von ihnen jeweils in einer Ebene liegt.

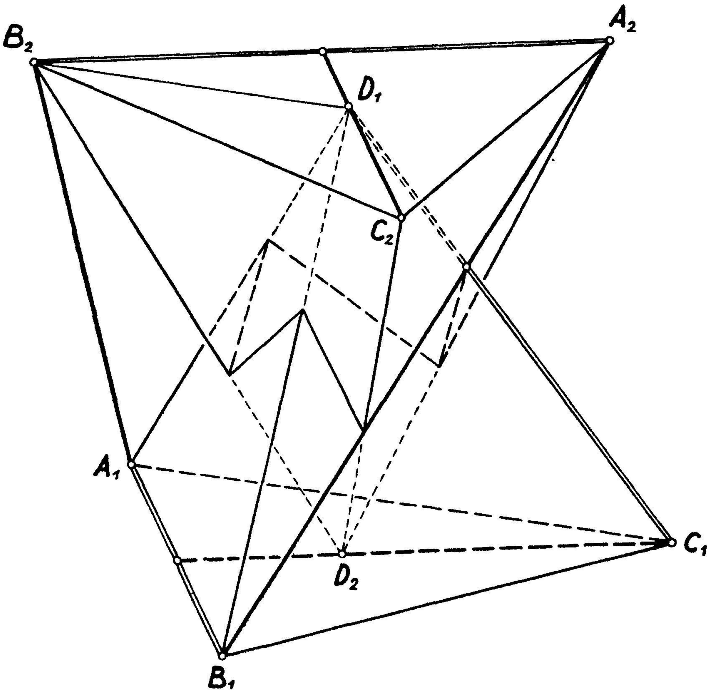

Abb. 5. Zwei allgemeine Möbiussche Tetraeder befinden sich immer in dreifacher hyperboloidischer Lage, von denen eine hier hervorgehoben ist.

Bei zwei allgemeinen Möbiusschen Tetraedern erhält man noch zwei andere hyperboloidische Geradenquadrupel, wenn man den Eckpunkten A_1, B_1, C_1, D_1 des ersten Tetraeders entweder die Ecken C_2, D_2, A_2, B_2 ... (2) oder die Ecken D_2, C_2, B_2, A_2... (3) des zweiten Tetraeders zuordnet. Bei unseren gleich großen regulären Möbiusschen Tetraedern entstehen die beiden neuen Geradenquadrupel aus den zu (1) gehörigen vier Geraden durch eine Drittelumdrehung in dem einen bzw. anderen Drehsinn um die Drehachse D_1D_2.

Für dieses besondere Möbiussche Tetraederpaar gibt es noch sechs weitere hyperboloidische Geradenquadrupel.

Ordnet man den Ecken A_1, B_1, C_1, D_1 des ersten Tetraeders der Reihe nach die Ecken D_2, B_2, C_2, A_2... (4) des zweiten Tetraeders zu (Abb. 6), so werden die vier stark ausgezogenen Verbindungsgeraden A_1D_2, B_1B_2, C_1C_2 und D_1A_2 entsprechender Tetraederecken von den durch Doppelstriche gekennzeichneten Geraden B_1C_1 und B_2C_2 getroffen. Um noch eine dritte derartige Gerade nachzuweisen, stellen wir fest, daß

[1]) Enzykl. math. Wiss. III, AB 9 (M. ZACHARIAS, *Elementargeometrie und elementare nichteuklidische Geometrie in synthetischer Behandlung*), S. 1065.

es auch durch irgendeinen beliebigen Punkt von D_1A_2 – in der Abb. 6 wurde hierfür der Punkt A_2 gewählt – eine Gerade gibt, welche die übrigen drei Geraden A_1D_2, B_1B_2 und C_1C_2 schneidet. Alle Geraden durch A_2, die B_1B_2 treffen, erfüllen eine Ebene, deren Spur auf der unteren Grundebene durch B_1 parallel zu A_2B_2, also normal zu A_1B_1 verläuft. Ebenso liegen alle Geraden durch A_2, die C_1C_2 schneiden, in einer Ebene, deren Spur auf der unteren Grundebene durch C_1 geht und parallel zu A_2C_2, und damit normal zu A_1C_1 ist. Da der Schnittpunkt P dieser beiden Grundspuren auf der Symmetralen A_1D_2 des gleichseitigen Dreiecks $A_1B_1C_1$ liegen muß, so schneidet die Gerade A_2P tatsächlich alle vier stark ausgezogenen Geraden, für die

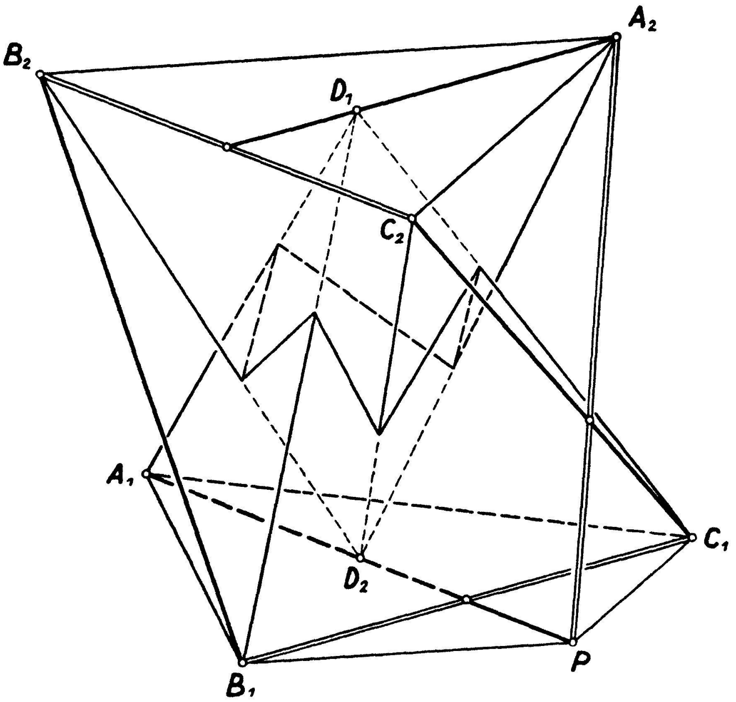

Abb. 6. Die beiden gleich großen regulären Möbiusschen Tetraeder befinden sich in neunfacher hyperboloidischer Lage, von denen eine hier angegeben ist, die aber von anderer Art ist als die in Abb. 5 dargestellte hyperboloidische Lage.

wir somit drei Treffgerade nachgewiesen haben. Da diese vier Geraden überdies nicht zu einer Ebene parallel sind, so liegen sie somit auf einem (einschaligen) Hyperboloid.

Üben wir auf diese vier Geraden wiederum die beiden möglichen Drittelumdrehungen um D_1D_2 aus, so ergibt sich, daß auch die Zuordnungen von A_1, B_1, C_1, D_1 mit $A_2, D_2, C_2, B_2 \ldots$ (5) oder $A_2, B_2, D_2, C_2 \ldots$ (6) wiederum auf hyperboloidische Geradenquadrupel führen.

Weist man nun den Eckpunkten A_1, B_1, C_1, D_1 des ersten Tetraeders die Ecken $C_2, B_2, A_2, D_2 \ldots$ (7) des zweiten Tetraeders zu (Abb. 7), so werden die vier stark ausgezogenen Verbindungsgeraden A_1C_2, B_1B_2, C_1A_2 und D_1D_2 von den durch Doppelstriche dargestellten Geraden B_1D_1 und B_2D_2 getroffen. Von jenen vier Verbindungsgeraden stellen sich die ersten drei in einem Normalriß auf eine zu den Grundflächen parallele Ebene als parallele Gerade dar, was aus der Symmetrie der Abb. 1 in bezug auf die Achse s unmittelbar folgt, während sich die Verbindungsstrecke D_1D_2 als Punkt abbildet. Die vier erwähnten Verbindungsgeraden sind demnach zu jeder zu

s normalen Ebene parallel und gehören demnach einer Regelschar eines hyperbolischen Paraboloides an.

Übt man auf diese vier Verbindungsgeraden wiederum eine Drittelumdrehung um D_1D_2 als Drehachse aus, so findet man, daß auch dann, wenn man die Eckpunkte A_1, B_1, C_1, D_1 des ersten Tetraeders der Reihe nach entweder mit den Eckpunkten $A_2, C_2, B_2, D_2 \ldots$ (8) oder mit den Eckpunkten $B_2, A_2, C_2, D_2 \ldots$ (9) des zweiten Tetraeders verbindet, jedesmal ein Geradenquadrupel in hyperboloidischer Lage entsteht.

Da sich außerdem zeigen läßt, daß die restlichen 15 Zuordnungsmöglichkeiten der Tetraederecken auf lauter nichthyperboloidisch liegende Geradenquadrupel führen,

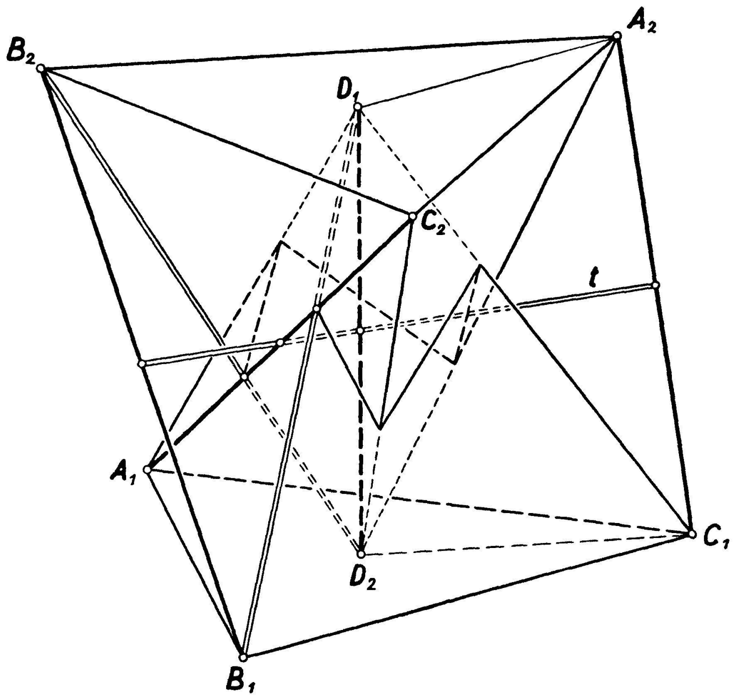

Abb. 7. Die beiden kongruenten regulären Möbiusschen Tetraeder befinden sich in neunfacher hyperboloidischer Lage, von denen eine hier angegeben ist, die aber von anderer Art ist als die in den Abb. 5 und 6 dargestellten hyperboloidischen Lagen.

so haben wir damit nachgewiesen, daß die beiden in Abb. 2 dargestellten Möbiusschen Tetraeder auf genau neunfache Weise hyperboloidisch liegen.

Durch jede beliebige eineindeutige geradentreue Punkttransformation werden die Treffgeraden von drei Strahlen in die Treffgeraden ihrer drei Bildstrahlen übergeführt. Es entsteht also dabei aus einer Regelfläche zweiten Grades wieder eine Regelfläche zweiten Grades. Durch jede solche projektive Abbildung müssen daher aus vier Geraden in hyperboloidischer Lage stets wieder vier hyperboloidisch liegende Gerade entstehen, während vier Gerade in nichthyperboloidischer Lage durch eine solche Transformation immer wieder in nichthyperboloidisch liegende Gerade übergeführt werden. Die hyperboloidische und die nichthyperboloidische Lage von vier Geraden des Raumes sind daher wiederum Eigenschaften, die bei allen projektiven Transformationen erhalten bleiben, und damit Eigenschaften rein projektiver Art.

Unterwirft man die gleich großen regulären Möbiusschen Tetraeder einer solchen Umformung, so entstehen dadurch allgemeinere Möbiussche Tetraeder, die sich wiederum in neunfacher hyperboloidischer Lage befinden. Da zwei ganz allgemeine

Möbiussche Tetraeder stets nur dreifach hyperboloidisch liegen, so erkennen wir von neuem, daß die hier behandelten gleich großen regulären Möbiusschen Tetraeder nicht nur einen metrisch, sondern zugleich auch einen projektiv speziellen Fall von Möbiusschen Tetraedern darstellen[1]). ARNULF REUSCHEL, Wien.

Hyperbolische Interpolation

Sind $y_1 = f(x_1)$ und $y_2 = f(x_2)$ zwei Werte einer reellen Funktion in einem Stetigkeitsintervall, so kann die auf der Proportionengleichung

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{1}$$

basierende lineare Interpolation

$$y = y_2 - (y_2 - y_1) \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad \text{oder} \quad y = y_1 + (y_2 - y_1) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

auch gedeutet werden als gewichtete arithmetische Mittelbildung aus y_1 und y_2, wobei die Abszissenabschnitte $(x - x_1)$ und $(x_2 - x)$ als Gewichte dienen, also

$$y = \frac{y_1(x_2 - x) + y_2(x - x_1)}{(x_2 - x) + (x - x_1)}. \tag{2}$$

Nehmen wir nun zu y_1 und y_2 noch einen dritten bekannten Wert $y_0 = f(x_0)$, so können wir die Mittelbildung verbessern, indem wir die Steigungen $(y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$ und $(y_2 - y_0)/(x_2 - x_0)$ als weitere Gewichte multiplikativ anfügen:

$$y = \frac{y_1(x_2 - x)\dfrac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} + y_2(x - x_1)\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{(x_2 - x)\dfrac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} + (x - x_1)\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}},$$

oder

$$y = \frac{y_1(x_2 - x)(x_1 - x_0)(y_2 - y_0) + y_2(x - x_1)(x_2 - x_0)(y_1 - y_0)}{(x_2 - x)(x_1 - x_0)(y_2 - y_0) + (x - x_1)(x_2 - x_0)(y_1 - y_0)}. \tag{3}$$

Man ersieht ohne weiteres, daß die zusätzliche Gewichtung ohne Einfluß ist, wenn die zu interpolierende Funktion eine Gerade ist, denn dann ist

$$\frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \text{const.}$$

Wir können die Interpolationsformel (3) auch anders kombinieren. Kehren wir zurück zur linearen Interpolation und bestimmen y einmal durch Interpolation aus y_2 und y_0, d. h. aus dem Verhältnis

$$\frac{y_2 - y_0}{y_2 - y} = \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x}, \quad \text{woraus} \quad y = y_0 + (y_2 - y_0)\frac{x - x_0}{x_2 - x_0},$$

sodann durch Extrapolation aus y_1 und y_0 d. h. aus dem Verhältnis

$$\frac{y - y_1}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_0}, \quad \text{woraus} \quad y = y_0 + (y_1 - y_0)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

---

[1]) Anmerkung der Redaktion: In dem Buche von W. BLASCHKE, *Projektive Geometrie* (Wolfenbüttel-Hannover 1947), findet man eine ausführliche Darstellung (S. 138–149) der Möbiusschen Tetraeder.