Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Band: 4 (1949)

Heft: 2

Rubrik: Aufgaben

man die Zunge mit z auf die Ziffer 6 der Grundskala einstellt und dann den Läufer auf h der Zunge schiebt. Auf der Grundskala liest man unter h die gesuchte Entfernung ab. Die gesamte Tätigkeit des Entfernungsschätzens mit dem Rechenschieber erfordert nur drei Handgriffe:

1. Visieren, 2. Einstellen der Zunge, 3. Einstellen des Läufers.

Der praktische Wert dieses Verfahrens liegt a) in der Handlichkeit des Gerätes (Taschenrechenschieber), b) in der Schnelligkeit der Ausführung und c) in der Gewinnung ziemlich genauer Zahlenwerte für die gesuchten Entfernungen.

Die Verwendung des Rechenschiebers ist im Vergleich zur Verwendung des Jakobsstabes oder des «Daumensprunges» und der «Daumenbreite» vorteilhafter, weil die Länge z auf der Zentimeterskala keine Konstante ist, wie bei den genannten Verfahren, sondern sich der bekannten Höhe, Länge oder Breite des anvisierten Gegenstandes entsprechend ergibt. FRIEDRICH STABER, Graz.

Aufgaben

Aufgabe 28. Eine Parabel ist durch zwei Punkte, A und B, und die zugehörigen Tangenten, die sich in T schneiden mögen, bestimmt. Man beweise die Richtigkeit der folgenden Konstruktion der Krümmungskreise in A und B:

Man zeichne das Rechteck über AT, dessen Gegenseite durch B geht. Dann verlängere man AT um sich selbst über T hinaus bis C und ziehe durch C die Normale zur Rechtecksdiagonale aus A. Ihr Schnittpunkt mit der Parabelnormalen in A ist das Krümmungszentrum für A.

Ferner zeige man: Die drei Parabeln, von denen jede zwei Seiten eines Dreiecks in der Mitte berührt, oskulieren sich paarweise, und die Krümmungsradien in den Oskulationspunkten verhalten sich wie die Kuben der Dreiecksseiten. A. STOLL.

Lösung: a) BC ist ein Durchmesser der Parabel, und $\overline{AC}^2/\overline{BC}$ stellt den zum Durchmesser durch A gehörenden Parameter $2\,p'$ dar. Ist M der nach Anweisung der Aufgabe konstruierte Punkt und n der Abstand des Punktes B von der Tangente AT, so folgt aus dieser Konstruktion $A\overline{M} = \overline{AC}^2/2\,n$. Das Verhältnis BC/n ist aber, ebenso wie $\overline{AC}^2/\overline{BC}$, von B unabhängig, also auch M. Anderseits gilt für den Radius r des Kreises, der durch B geht und die Tangente AT in A berührt $\overline{B'A}^2 = \overline{BB'}\,(2\,r - \overline{BB'})$ (B' ist die Projektion von B auf AT). Da T stets auf dem Durchmesser liegt, der $\overline{AB}$ halbiert, wird, wenn B an A heranrückt,

$$\lim \overline{B'A}/\overline{AC} = 1, \quad \text{also} \quad \lim r = \lim \overline{B'A}^2/2\,n = \lim \overline{AC}^2/2\,n = AM.$$

b) Die Behauptung über die drei Parabeln folgt fast unmittelbar aus dem gegebenen Ausdruck für den Krümmungsradius. Diese Radien haben hier die Werte $a^3/2\,F$, $b^3/2\,F$, $c^3/2\,F$, wo F die Fläche des Dreiecks bedeutet. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht.

Lösungen, die die allgemeine Formel für den Krümmungsradius verwenden, sandten L. DESCLOUX (Fribourg), K. RIEDER (Riehen) und E. ROTHMUND (Zürich).

Für die analytische Lösung sind wohl folgende Annahmen am zweckmäßigsten: $A(0\,|\,0)$, $T(r\,|\,-s)$, $B(2\,r\,|\,t)$, $y = a\,x^2 + b\,x$. Sind α, β die Steigungswinkel der Tangenten in A, B und $\varphi = \alpha - \beta$ ihr Zwischenwinkel, so ist $b = \operatorname{tg}\alpha$, $a = (\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha)/4\,r$

$$\varrho_A = -2\,r/(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha)\cos^3\alpha = 2\,\overline{AT}^2/\overline{BT}\sin\varphi.$$

Anmerkung des Aufgabenstellers: Es verdient, anerkannt zu werden, daß Herr E. TROST den schönen Satz über das Verhalten der Krümmung einer ebenen Kurve bei affiner Transformation und seinen begeisternd eleganten geometrischen Beweis der Vergessenheit entrissen hat (siehe Mitteilungen Band 3, Nr. 4). Aus dem Spezialfall der Krümmungsinvarianz bei Scherung parallel zur Tangente ergibt sich die Begründung der in Aufgabe 28 geschilderten Konstruktion fast unmittelbar.

In der Tat, wenn eine Scherung die gegebene Parabel unter Festhaltung von A und T in diejenige Parabel überführt, für welche A Scheitelpunkt ist, dann möge B in B' übergehen. Der Krümmungsradius in A und das konstruierte Rechteck bleiben unverändert. Die neue Tangente $B'T$ wird aber parallel zur Rechtecksdiagonale aus A, und die geschilderte Konstruktion wird identisch mit der bekannten Konstruktion des Scheitelkrümmungsradius. A. STOLL.

Aufgabe 29. Einem Dreieck können Ovale umschrieben werden, indem man über den Seiten als Sehnen Parabelbogen zeichnet, die sich in den Ecken berühren. Man zeige, daß genau eines dieser Ovale stetig gekrümmt ist. Für welche möglichst umfassende Teilmenge der Ovale ist das Oval mit stetiger Krümmung durch minimalen Flächeninhalt ausgezeichnet? E. TROST.

Lösung: 1. Teil. Das Dreieck UVW sei aus den «Stoßtangenten» VW, WU, UV in den Eckpunkten A, B, C des gegebenen Dreiecks gebildet. Wir zeigen, daß das Oval in A, B, C nur dann stetig gekrümmt ist, wenn diese Punkte in die Mitten der Seiten von $\triangle UVW$ fallen. Da es sich um eine Frage der Affingeometrie handelt, darf $\triangle UVW$ dabei als gleichseitig vorausgesetzt werden. Sei T_3 der Berührungspunkt auf der Seite UV und $UT_3 = c_1$, $VT_3 = c_2$; entsprechend auf $VW: VT_1 = a_2$, $WT_1 = a_3$ usw. Nach Aufgabe 28 gilt z. B. für den Krümmungsradius in T_3: $r = 2\, c_2^2/a_2 \sin 60°$, also bei Gleichheit der beiden Krümmungen $c_2^2/c_1^2 = a_2/b_1$. Sei nun etwa $\underline{c_2 < c_1}$, also $a_2 < b_1$ und $\underline{a_3 > b_3}$ (*). Aus den entsprechenden Gleichungen $b_1^2/b_3^2 = c_1/a_3$, $a_3^2/a_2^2 = b_3/c_2$ folgt zusammen mit der ersten $c_2\, b_1\, a_3/c_1\, b_3\, a_2 = 1$,

$$\frac{b_3}{a_3} = \frac{(b_1\, a_3\, c_2)^2\, c_1}{(b_3\, a_2\, c_1)^2\, c_2} = \frac{c_1}{c_2}\,,$$

also $\underline{b_3 > a_3}$ im Widerspruch zu (*). Also muß $c_2 = c_1$ sein.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht.

2. Teil. Was die Minimaleigenschaft anbetrifft, so hat das stetig gekrümmte Oval als einziges minimale Fläche in derjenigen Klasse von Ovalen, bei denen zwei Stoßtangenten zu den Gegenseiten des Grunddreiecks parallel sind. In der Tat ist ja die Fläche eines Ovals gleich der Fläche von ABC, vermehrt um zwei Drittel der Differenz zwischen den Flächen von UVW und ABC; sie wird also minimal, wenn die Fläche von UVW minimal wird. Sind nun etwa die Stoßtangenten in B und C parallel zu AC bzw. AB, dann ist die Fläche von UVW minimal, wenn die dritte Stoßtangente VW durch A halbiert wird. Ist nämlich $V'W'$ eine andere Stoßtangente in A, dann denke man sich V' auf UC und W' auf UB ohne Rücksicht auf A so variiert, daß die Fläche von $UV'W'$ konstant bleibt. $V'W'$ umhüllt dann einen Hyperbelast mit den Asymptoten UC und UB, und A liegt im Raum zwischen ihm und den Asymptoten. Die Verlängerung von UA schneide die Hyperbel in A'. Deren Tangente daselbst wird durch A' halbiert und ist daher zu VW parallel. Die besagte Dreiecksfläche ist also größer als die von UVW.

In der Klasse derjenigen Ovale, bei denen mindestens eine Stoßtangente zur Gegenseite des Grunddreiecks parallel ist, kommt das stetig gekrümmte Oval ebenfalls vor, und seine Fläche ist auch minimal. Aber es teilt diese Eigenschaft mit allen Ovalen dieser Klasse, deren Breite senkrecht zur genannten Stoßtangente anderthalbmal so groß ist wie die in derselben Richtung liegende Höhe des Grunddreiecks. Ist nämlich etwa VW parallel zu BC, a die Länge von BC, h die Höhe von ABC auf BC und u der Abstand des Punktes U von BC, dann gilt für die Fläche F von UVW: $2F = a\,u\,(u+h)^2/u^2 = a\,h\,(u+h)^2/u\,h = 4\,a\,h\,M^2/G^2$, wo M das arithmetische und G das geometrische Mittel von u und h bedeuten. Da M/G nie kleiner als eins ist und gleich eins nur für $u = h$, ist F nie kleiner als das vierfache der Fläche von ABC, d.h. als die Fläche des Stoßtangentendreiecks des stetig gekrümmten Ovals, und Gleichheit tritt ein für $u = h$.

A. Stoll, Zürich.

Eine weitere Lösung sandte L. Descloux, Fribourg.

Aufgabe 33. Der Brennpunkt F und zwei Kurvenpunkte A, B bestimmen zwei Parabeln. Die Verbindungsgerade der Pole S_1, S_2 der gemeinsamen Sehne $s(AB)$ in bezug auf die beiden Parabeln geht durch F, wird in F halbiert und bildet mit FA, FB gleiche Winkel. Ferner liegt der Berührungspunkt der Tangente parallel zu $s(AB)$ an die eine Parabel auf der Achse der anderen Parabel.

S. Joss.

1. Lösung. M sei die Mitte von AB, T_1 diejenige von MS_1 und T_2 diejenige von MS_2. Denkt man sich die beiden Kreise durch F um A und um B, dann sind deren äußere gemeinsame Tangenten die Leitlinien der beiden Parabeln und symmetrisch zu AB. Folglich sind auch die Achsenparallelen MS_1 und MS_2 symmetrisch zu AB. Da nun die Tangenten in T_1 und T_2 zu AB parallel sind und den Winkel zwischen Brennstrahl und Achsenparallele in T_1 und T_2 halbieren, so muß T_1F zu MS_2 parallel sein und ebenso T_2F zu MS_1. Daraus folgt, daß F die Mitte von S_1S_2 ist und daß FT_1 und FT_2 die beiden Achsen sind.

Sei ferner L der Schnittpunkt der beiden Leitlinien. Er liegt auf AB. $FS_1 \equiv FS_2$ ist seine Polare in bezug auf jede der beiden Parabeln und also normal zu FL. K sei ihr Schnittpunkt mit AB. L und K sind konjugiert in bezug auf beide Parabeln. Die Strahlen FL und FK trennen also FA und FB harmonisch, und da sie senkrecht aufeinander stehen, sind sie die Winkelhalbierenden der letzteren.

Die Eigenschaft des Winkelhalbierens ergibt sich auch durch Winkelvergleich auf Grund der bekannten Tatsache, daß S_iF und S_iM mit S_iA und S_iB gleiche Winkel bilden (Tangenteninvolution an konfokale Parabeln). Man findet dabei, daß $\sphericalangle AS_iB$ gleich dem Außenwinkel bei F sowohl des Dreiecks AFS_i als auch des Dreiecks BFS_i ist. Daraus ergibt sich dann außerdem, daß S_1AS_2B ein Kreissehnenviereck ist.

A. Stoll, Zürich.

2. Lösung. Führt man durch eine Projektivität die Punkte A, B in die imaginären Kreispunkte über, so entstehen aus den Parabeln Kreise, und die unendlich ferne Gerade wird zu einer gemeinsamen Tangente u' derselben. Die zweite reelle gemeinsame Parabeltangente wird zu einer mit u' gleichartigen gemeinsamen Kreistangente t' und der Brennpunkt F als Schnittpunkt der beiden andern gemeinsamen Parabeltangenten wird zu einem Ähnlichkeitspunkt F' der beiden Kreise. Den Polen S_1, S_2 von AB entsprechen die Mittelpunkte S_1', S_2' der Kreise. Da diese zu den Ähnlichkeitspunkten F' und (t, u) harmonisch liegen, ist F Mittelpunkt von S_1S_2. Der Normalen n' in F' zur Zentralen $S_1'S_2'$ entspricht die Normale in F zu S_1S_2, und da die isotropen Geraden durch F' harmonisch zu den Geraden n und $S_1'S_2'$ liegen, gilt dies auch von den entsprechenden Geraden FA, FB in bezug auf n' und S_1S_2, d. h. FA, FB bilden gleiche Winkel mit S_1S_2. Schließlich entspricht der Parabeltangenten parallel AB eine Kreistangente parallel u' und der Achse der nicht zu dieser Tangente gehörenden Parabel die Verbindungsgerade von F' mit dem Berührungspunkt des ihr entsprechenden Kreises mit u'. Diese geht aber durch den Berührungspunkt jener Tangente.

C. Bindschedler, Küsnacht.

3. Lösung: Die beiden Parabeln p_1 und p_2 haben die Punkte A und B gemeinsam und besitzen in der Ferngeraden u (uneigentlichen Geraden) der Ebene sowie dem Minimalgeradenpaar m_1 und m_2 durch den Brennpunkt F gemeinsame Tangenten.

Nach dem Satze von DESARGUES[1]) bilden die Minimalgeraden durch F sowie das Paar der Brennstrahlen FA und FB zwei entsprechende Strahlenpaare einer Involution, auf deren somit senkrechten Doppelstrahlen die Schnittpunkte S_i der Tangenten in A und B liegen, was die behauptete Winkelgleichheit zur Folge hat. Betrachten wir die in einem der absoluten Kreispunkte, etwa $I_1 = (u\, m_1)$ induzierte Strahlinvolution – sie ist durch das Strahlenpaar u, m_1 sowie I_1A, I_1B festgelegt – und bringen sie mit der durch F gehenden Geraden S_1S_2 zum Schnitt, so erhalten wir eine Punktinvolution mit dem Zentralpunkt F und den Doppelpunkten S_1 und S_2, was die behauptete Streckengleichheit zur Folge hat: $\overline{S_1F} = \overline{FS_2}$.

p_1 wird in p_2 durch eine perspektive Kollineation übergeführt, wenn wir F als Zentrum und $s\,(AB)$ als Achse der Kollineation wählen und etwa der Ferngeraden u als Tangente von p_1 die aus $W = (s\,u)$ legbare zweite Tangente an p_2 zuordnen. Da nun auch die Berührungspunkte dieser Tangenten von p_1 und p_2 in der Kollineation sich entsprechen, also auf Kollineationsstrahlen durch F liegen, ist die Behauptung erwiesen, daß die Berührungspunkte der Tangenten parallel zu s an die eine Parabel jeweils auf der Achse der anderen Parabel liegen. Diese zu s parallelen Tangenten fungieren als Gegenachsen der erwähnten Kollineation, in der die Punkte S_1 und S_2 einander zugeordnet sind. H. R. MÜLLER, Graz (Österreich).

Weitere Lösungen gingen ein von L. DESCLOUX (Fribourg) und E. ROTHMUND (Zürich).

Neue Aufgaben

57. Welches ist die größte ganze Zahl n, die durch alle ganzen Zahlen des Intervalls $(2, \sqrt[3]{n})$ teilbar ist? L. RÉDEI, Szeged (Ungarn).

58. Auf einer Kugel vom Radius R liegt ein mit der Zirkelöffnung R um ein bekanntes sphärisches Zentrum M gezeichneter Kreis vor. Man konstruiere auf der Kugel (ohne Benützung einer Hilfsebene) mit dem Zirkel allein die Ecken eines der Kugel eingeschriebenen regulären Tetraeders. W. LÜSSY, Winterthur.

59. Ein Torus wird von einem schiefen Kreiszylinder, dessen Kreisschnitte zur Torusachse senkrecht sind, in zwei Punkten berührt. Es bedeute $R + r$ bzw. $R - r$ den Radius des Äquator- bzw. Kehlkreises, ϱ den Radius der Zylinderkreise ($\varrho \leqq R - r$), d den Abstand der Mittellinie des Zylinders von der Torusachse ($d \leqq R - r - \varrho$), α den Neigungswinkel der Mittellinie des Zylinders gegen die Äquatorebene und L die Länge der Mantellinien zwischen den beiden berührenden Kreisen des Zylinders. Man zeige:

$$\arcsin \frac{r}{R-\varrho} \leqq \alpha < \arcsin \sqrt{\frac{r}{R-\varrho}}\,,$$

$$L = 2\sqrt[4]{(R-r-\varrho-d)\,(R-r-\varrho+d)\,(R+r-\varrho-d)\,(R+r-\varrho+d)}.$$

E. TROST, Zürich.

Aufbaufonds

Im Verlaufe der beiden letzten Monate sind dem Aufbaufonds weitere Beiträge zugeflossen. Insbesondere verdanken wir eine Zuweisung von Fr. 1 500.– durch die Stiftung zur Förderung der mathematischen Wissenschaften in der Schweiz. Wir wiederholen unseren Aufruf an die Abonnenten zur tätigen Mithilfe bei der Äufnung des Aufbaufonds. Bezügliche Spenden können auf das persönliche Postcheckkonto des Unterzeichneten einbezahlt werden (VIII 31649, mit dem Vermerk «Aufbaufonds» auf der Rückseite des Einzahlungsscheins). Der Verwalter: H. JECKLIN.

[1]) Vgl. etwa F. ENRIQUES, *Vorlesungen über projektive Geometrie* (deutsche Ausgabe von H. Fleischer) 1903, S. 223 ff. und S. 251.