Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 4 (1949)
Heft: 3

Artikel: Geometrischer Ort dritter Ordnung
Autor: Buchner, P.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14319

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer

El. Math. Band IV Nr. 3 Seiten 49–72 Basel, 15. Mai 1949

Geometrischer Ort dritter Ordnung

Die Frage nach einem geometrischen Ort ist die klassische Aufgabenformulierung in der Geometrie; doch pflegt man dabei selten die Theorie der Kegelschnitte zu überschreiten. Es ist zweckmäßig, auch Aufgaben zu behandeln, die auf leicht konstruierbare Kurven höherer Ordnung führen.

A. – Die folgende Aufgabe ergibt – infolge der symmetrischen Lage der Bestimmungsstücke – einen *zusammengesetzten geometrischen Ort*, eine zerfallende Kurve dritter Ordnung:

Ein Kreis k vom Radius r wird um die Spitze $C(0|0)$ eines gleichschenkligen Dreiecks ABC gezeichnet. Aus den Eckpunkten $A(-1|10)$ und $B(+1|10)$ werden die vier Tangenten an den Kreis k gezeichnet. Gefragt wird nach dem geometrischen Ort der Tangentenschnittpunkte bei veränderlichem Radius r.

Obwohl das Ergebnis geometrisch leicht erkennbar ist, wollen wir die Aufgabe nach den Methoden der analytischen Geometrie lösen.

Aus der Gleichung des Kreises

$$k \equiv x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

erhält man die Gleichungen der Potenzlinie der Punkte A und B zu

$$p_a \equiv -x + 10\,y - r^2 = 0 \quad \text{und} \quad p_b \equiv x + 10\,y - r^2 = 0.$$

Beide Punkte haben in bezug auf k dieselbe Potenz $k_a = k_b = 101 - r^2$. Die Gleichung des Tangentenpaares aus A ist danach

$$k\,k_a - p_a^2 \equiv (x^2 + y^2 - r^2)\,(101 - r^2) - (x - 10\,y + r^2)^2 = 0 \tag{1}$$

und diejenige des Paares aus B

$$k\,k_b - p_b^2 \equiv (x^2 + y^2 - r^2)\,(101 - r^2) - (x + 10\,y - r^2)^2 = 0. \tag{2}$$

Durch Elimination des Parameters r folgt aus (1) und (2) sofort

$$r^2 = \frac{100\,x^2 + y^2 + 20\,x\,y}{x^2 + y^2 + 2\,x - 20\,y + 101} = \frac{100\,x^2 + y^2 - 20\,x\,y}{x^2 + y^2 - 2\,x - 20\,y + 101}$$

oder ausmultipliziert

$$\underline{x\,(10\,x^2 + 10\,y^2 - 101\,y)\,(y - 10) = 0.}$$

Der geometrische Ort setzt sich zusammen aus der *y-Achse*, auf ihr treffen sich die

beiden äußern und die beiden innern Tangenten aus A und B, und dem *Umkreis des Dreiecks ABC*, auf dem sich je eine innere und eine äußere Tangente schneiden. Es ist für den Schüler reizvoll, einen geometrischen Ort kennen zu lernen, der sich aus einem Kreis und einer Geraden zusammensetzt.

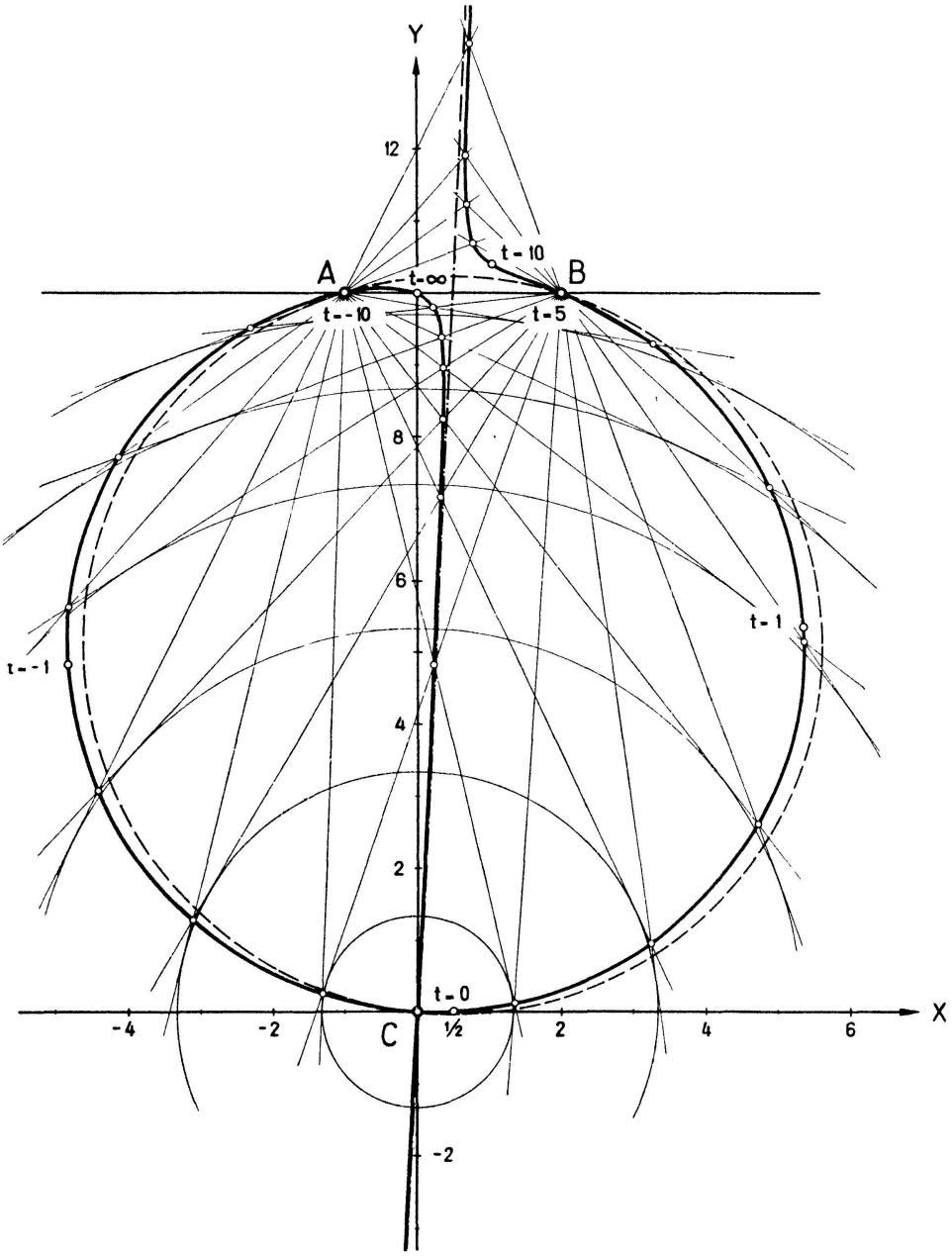

Fig. 1

Die Gerade $y = 10$ hat mit der Aufgabe nichts zu tun; sie ist bestimmt durch die beiden gegebenen Punkte A und B. Man kann aber auch sagen, für $r = 10$ fällt eine Tangente aus A mit einer Tangente aus B zusammen, und jeder Punkt der Geraden $y = 10$ kann als «Schnittpunkt» aufgefaßt werden.

B. – Wir wählen nun als Eckpunkte des Dreiecks die Punkte $A(-1|10)$, $B(2|10)$ und $C(0|0)$, die kein gleichschenkliges Dreieck mehr bilden.

Die auf den Eckpunkt A sich beziehenden Elemente bleiben unverändert, aber die Gleichung der Potenzlinie in bezug auf B heißt jetzt $p_b \equiv 2\,x + 10\,y - r^2 = 0$, und dementsprechend wird $k_b \equiv 104 - r^2$. An Stelle von Gleichung (2) tritt

$$k\,k_b - p_b^2 \equiv (x^2 + y^2 - r^2)\,(104 - r^2) - (2\,x + 10\,y - r^2)^2 = 0. \tag{3}$$

r^2 wird aus (1) und (3) eliminiert:

$$r^2 = \frac{100\,x^2 + y^2 + 20\,x\,y}{x^2 + y^2 + 2\,x - 20\,y + 101} = \frac{100\,x^2 + 4\,y^2 - 40\,x\,y}{x^2 + y^2 - 4\,x - 20\,y + 104}$$

oder ausmultipliziert

$$(y - 10)\,(20\,x^3 - x^2\,y + 20\,x\,y^2 - y^3 - 10\,x^2 - 204\,x\,y + 10\,y^2) = 0.$$

Wiederum gehört die Gerade $y = 10$ nicht zum geometrischen Ort, der nun aus einer echten *Kurve dritter Ordnung*, einer *Strophoide*, besteht:

$$\underline{C_3 \equiv (x^2 + y^2)\,(y - 20\,x) + 10\,x^2 + 204\,x\,y - 10\,y^2 = 0.} \tag{4}$$

Im Falle B wurde gegenüber A das bestimmende Dreieck nur wenig geändert, daher weicht die C_3 auch nur wenig vom zerfallenden geometrischen Ort, bestehend aus Kreis und y-Achse, ab (Fig. 1).

Der Doppelpunkt $C(0|0)$ bleibt erhalten, während sich der zweite auflöst. Nach wie vor geht die Kurve durch die Punkte A und B. Diese Strophoide ist leicht punktweise konstruierbar, da man rasch an ein System konzentrischer Kreise die Tangenten aus A und B gezeichnet und deren Schnittpunkte bestimmt hat.

Schreibt man die Gleichung (4) in homogener Form

$$(x_1^2 + x_2^2)\,(x_2 - 20\,x_1) + (10\,x_1^2 + 204\,x_1\,x_2 - 10\,x_2^2)\,x_3 = 0,$$

so erhält man als Schnitt mit der uneigentlichen Geraden $x_3 = 0$ die uneigentlichen Kreispunkte $x_1^2 + x_2^2 = 0$ und den Punkt $20\,x_1 - x_2 = 0$. Die Kurve heißt, der ersteren Eigenschaften wegen, eine zirkulare C_3; sie hat außerdem die Asymptote $y = 20\,x - (90/401)$. Die Strophoiden sind rationale Kurven, d. h. die homogenen Koordinaten x_k lassen sich als ganze rationale Funktion dritter Ordnung eines Parameters darstellen.

Eine Gerade $y = t\,x$ durch den Doppelpunkt schneidet die C_3 noch genau in einem Punkte. Aus (4) folgt dann

$$x = \frac{10 + 204\,t - 10\,t^2}{(1 + t^2)\,(20 - t)},$$

daher gilt

$$\begin{aligned} x_1 &= 10 + 204\,t - 10\,t^2, \\ x_2 &= 10\,t + 204\,t^2 - 10\,t^3, \\ x_3 &= 20 - t + 20\,t^2 - t^3. \end{aligned}$$

Aus $y = t\,x$ erkennt man, daß der Parameter t gleich der Steigung der Sehne vom Doppelpunkt nach dem Kurvenpunkt ist. Die x-Achse, für die $t = 0$ ist, schneidet die C_3 außer im Doppelpunkt im Punkte $x = 1/2$. Dem reellen uneigentlichen Punkt entspricht der Parameterwert $t = 20$, während die imaginären uneigentlichen Punkte, die Kreispunkte, zu den Werten $t = \pm\,i$ gehören.

P. BUCHNER, Basel.