

Gerade und ungerade Permutationen in geordneter Reihenfolge

Autor(en): **Aigner, Alexander**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **4 (1949)**

Heft 3

PDF erstellt am: **11.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-14320>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Gerade und ungerade Permutationen in geordneter Reihenfolge

Man ordnet einerseits die $n!$ Permutationen von n verschiedenen Elementen lexikographisch an, so daß jede eine bestimmte Nummer N erhält; andererseits unterscheidet man zwischen geraden und ungeraden Permutationen. Die vorliegende Arbeit gilt nun dem Zusammenhang zwischen diesen beiden Gesichtspunkten.

Es ist nun keineswegs so, daß eine Permutation mit gerader lexikographischer Nummer auch eine gerade Permutation im Sinne der Theorie ist. Wohl aber ergibt sich der Charakter der Permutation eindeutig aus ihrer Nummer N , und zwar als alleinige Funktion dieser Zahl, unabhängig von der Anzahl der Elemente n . (Wir denken uns n so groß genommen, daß $n! \geq N$ wird.) Das sei im Folgenden gezeigt.

Der Einfachheit halber nehmen wir als permutierte Elemente die Zahlen 1, 2, 3, ..., n selbst und als Grundstellung ihre natürliche Reihenfolge. Ferner bezeichnen wir die Permutation mit der lexikographischen Nummer N kurz mit P_N ; dann ist P_1 die Identität, das Einheits-element der symmetrischen Gruppe. Weiterhin ordnen wir, wie es auch sonst üblich ist, den geraden Permutationen das Vorzeichen +, den ungeraden das Vorzeichen - zu.

Ist nun

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_n$$

irgendeine Permutation der Zahlen von 1 bis n , so ergibt sich die Nummer N dieser Permutation nach der bekannten Formel der Kombinatorik

$$N - 1 = k_1 (n - 1)! + k_2 (n - 2)! + \dots + k_{n-1} \cdot 1!,$$

wobei k_1 die Anzahl der Vorgänger von a_1 in der natürlichen Reihe ist, k_2 die Anzahl der Vorgänger von a_2 unter den übrigen $n - 1$ Zahlen ohne a_1 , k_3 die Anzahl der Vorgänger von a_3 unter den Zahlen außer a_1 und a_2 usw. (im besonderen also stets $k_1 = a_1 - 1$). Diese Koeffizienten k bilden ein eindeutiges System, und zwar geht k_1 von 0 bis $n - 1$, k_2 von 0 bis $n - 2$, allgemein k_i von 0 bis $n - i$.

Zugleich ist aber k_1 die Anzahl der Inversionen, welche dadurch entstehen, daß das Element a_1 an erster Stelle steht; k_2 weitere Inversionen kommen beim Vergleich mit a_2 zustande usw., so daß die Gesamtzahl der Inversionen der betreffenden Permutation $k_1 + k_2 + \dots + k_n = \Sigma k$ beträgt. Daher ergibt sich ihr Vorzeichen

$$\text{sign } P_N = (-1)^{k_1 + k_2 + \dots + k_n} = (-1)^{\Sigma k}$$

aus der durch die Nummer N eindeutig gegebenen obigen Darstellung.

So ergibt z. B. für $N = 43$ die Formel

$$42 = 1 \cdot 24 + 3 \cdot 6 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1$$

$$\text{sign } P_{43} = (-1)^{1+3} = +1;$$

oder für $N = 178$

$$177 = 1 \cdot 120 + 2 \cdot 24 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1$$

$$\text{sign } P_{178} = (-1)^{1+2+1+1+1} = +1.$$

Die 43. und die 178. sind also gerade Permutationen.

Dieses Ergebnis läßt sich auch auf anderem Wege gewinnen, wo wir außerdem einen klaren Einblick in die Aufeinanderfolge der Vorzeichen erhalten. Wir zerlegen die Reihe aller $n!$ Permutationen in n Perioden der größten Ordnung $(n-1)!$, welche alle mit demselben Element beginnenden Permutationen zusammenfassen; dann zerlegen wir jede solche Größtperiode in die $n-1$ Perioden zweitgrößter Ordnung $(n-2)!$, welche mit denselben 2 Elementen beginnen, usw. Alle Permutationen einer Periode der Ordnung $i!$ beginnen mit denselben $n-i$ Elementen, während die restlichen i Elemente alle Permutationen in geordneter Reihenfolge durchlaufen.

Nun nehmen wir zwei benachbarte Perioden der Ordnung $i!$, welche aber derselben Periode nächsthöherer Ordnung $(i+1)!$ angehören sollen, und vergleichen sie gliedweise miteinander. Die beiden Glieder tragen dann etwa die Nummern

$$r(i+1)! + si! + t \quad \text{und} \quad r(i+1)! + (s+1)i! + t,$$

wobei $0 \leq s < i$ sein muß und $1 \leq t \leq i!$ ist. Und sie haben die Gestalt

$$\begin{array}{cccc} a_1 \dots a_{n-i-1} & b_1 \dots b_2 & \dots & b_{i+1}, \\ a_1 \dots a_{n-i-1} & b_2 \dots b_1 & \dots & b_{i+1}. \end{array}$$

Denn der Übergang von der ersten zur zweiten Stellung vollzieht sich so: Anfangs bleiben $n-i-1$ Elemente (a) unverändert; von den $i+1$ folgenden (b) wird das zunächst erststehende b_1 durch das unter ihnen nächstgrößere b_2 ersetzt, und hierauf wird unter den i übrigen Stellen dieselbe Anordnung hergestellt wie früher. Dadurch kommt aber b_1 an den Platz von b_2 und jedes andere b an seinen alten Platz, weil b_1 als Größennachbar von b_2 zwischen den übrigen b genau dieselbe Stellung einnimmt wie vorhin b_2 . (b_1 ist nicht das größte b , also b_2 vorhanden, weil die erstbetrachtete Periode nicht die letzte in ihrer Überperiode war.)

Der Übergang zur anderen Stellung ist also lediglich die Transposition $(b_1 b_2)$, daher haben die beiden verglichenen Permutationen immer entgegengesetztes Vorzeichen.

Jeder solche Periodenübergang (zu einer Nachbarperiode ohne Überschreiten einer Überperiode) bringt somit einen Vorzeichenwechsel. Aus lauter solchen Übergängen (gleicher oder verschiedener Ordnung) läßt sich aber jeder beliebige Übergang unschwer zusammensetzen. Gehen wir von der ersten Permutation P_1 , der natürlichen Reihenfolge aus, welcher das positive Zeichen zukommt, zur Permutation mit der Nummer N , wobei

$$N-1 = k_1(n-1)! + k_2(n-2)! + \dots + k_{n-1} \cdot 1!,$$

so wird die Anzahl der Vorzeichenänderungen

$$k_1 + k_2 + \dots + k_{n-1} = \Sigma k$$

und somit

$$\text{sign } P_N = (-1)^{\Sigma k},$$

wie wir es vorhin hatten.

Dieser Einblick ins Gefüge der Perioden liefert auch eine Übersicht über die Folge der Vorzeichen der angeordneten Permutationen. Die kleinste Periode ist die «Einsperiode», d. h. das Einzelglied selbst, und innerhalb der nächsten, der Zweierperiode, müssen ihre Vorzeichen alternieren. Eine Permutation mit ungerader Nummer und

die mit der darauffolgenden geraden Nummer haben immer entgegengesetztes Vorzeichen:

$$\text{sign } P_{2r-1} = - \text{sign } P_{2r}$$

Eine Tatsache, die sofort einleuchtet, da diese Permutationen sich nur durch Vertauschung ihrer beiden letzten Elemente unterscheiden.

Ganz allgemein nehmen die Perioden einer beliebigen Ordnung $i!$ nur zwei, und zwar einander entgegengesetzte Zeichenfolgen an; und diese alternieren innerhalb einer nächst höheren Periode regelmäßig. Für die Sechserperiode sind es die Zeichenfolgen $+ - - + + -$ und $- + + - - +$. In jeder Periode gibt es gleichviel Plus- und Minuszeichen.

Niemals kommen drei gleiche Zeichen hintereinander. In der Regel ist jedem Zeichen das übernächste entgegengesetzt, es herrscht also der viergliedrige Wiederholungstyp $+ + - -$, ausgenommen an den Grenzen der 24erperioden, wo z. B. an den Stellen 23, 24, 25, 26 die Zeichenfolge $- + - +$ erscheint. Diese Abweichung unterbleibt jedoch bei den Vielfachen von $6!$, tritt aber wieder auf bei denen von $8!$ usw., abwechselnd in Ausnahmen und Gegenausnahmen.

ALEXANDER AIGNER, Graz.

Über die Potenzsummen der natürlichen Zahlen

Die Summe

$$S_p(n) \equiv 1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p$$

der Potenzen der n ersten natürlichen Zahlen für ganzzahlige positive Exponenten p ist bekanntlich durch ein Polynom von n des Grades $p + 1$ darstellbar. Abgesehen vom uneigentlichen Fall

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2},$$

muß, wie nachher bewiesen wird, dieses Polynom von folgender Gestalt sein:

a) bei einem geraden Exponenten $p = 2q$:

$$S_{2q}(n) = n(n+1)(2n+1)P_{q-1}[(2n+1)^2],$$

b) bei einem ungeraden Exponenten, größer als 1, $p = 2q + 3$:

$$S_{2q+3}(n) = n^2(n+1)^2P_q[(2n+1)^2],$$

wo P ein Polynom des Grades $q - 1$ bzw. q des Quadrates von $(2n + 1)$ bedeutet. Es ist beispielsweise:

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$S_4(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{120} [3(2n+1)^2 - 7],$$

$$S_6(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{672} [3(2n+1)^4 - 18(2n+1)^2 + 31],$$

$$S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$