die mit der darauffolgenden geraden Nummer haben immer entgegengesetztes Vorzeichen:

$$\operatorname{sign} P_{2r-1} = - \operatorname{sign} P_{2r}$$

Eine Tatsache, die sofort einleuchtet, da diese Permutationen sich nur durch Vertauschung ihrer beiden letzten Elemente unterscheiden.

Ganz allgemein nehmen die Perioden einer beliebigen Ordnung $i!$ nur zwei, und zwar einander entgegengesetzte Zeichenfolgen an; und diese alternieren innerhalb einer nächst höheren Periode regelmäßig. Für die Sechserperiode sind es die Zeichenfolgen $+ - - + + -$ und $- + + - - +$. In jeder Periode gibt es gleichviel Plus- und Minuszeichen.

Niemals kommen drei gleiche Zeichen hintereinander. In der Regel ist jedem Zeichen das übernächste entgegengesetzt, es herrscht also der viergliedrige Wiederholungstyp $+ + - -$, ausgenommen an den Grenzen der 24erperioden, wo z. B. an den Stellen 23, 24, 25, 26 die Zeichenfolge $- + - +$ erscheint. Diese Abweichung unterbleibt jedoch bei den Vielfachen von $6!$, tritt aber wieder auf bei denen von $8!$ usw., abwechselnd in Ausnahmen und Gegenausnahmen.

Alexander Aigner, Graz.

Über die Potenzsummen der natürlichen Zahlen

Die Summe

$$S_p(n) \equiv 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p$$

der Potenzen der n ersten natürlichen Zahlen für ganzzahlige positive Exponenten p ist bekanntlich durch ein Polynom von n des Grades $p + 1$ darstellbar. Abgesehen vom uneigentlichen Fall

$$S_1(n) = \frac{n\,(n+1)}{2},$$

muß, wie nachher bewiesen wird, dieses Polynom von folgender Gestalt sein:

a) bei einem geraden Exponenten $p = 2\,q$:

$$S_{2q}(n) = n(n+1)\,(2\,n+1)\,P_{q-1}\,[(2\,n+1)^2],$$

b) bei einem ungeraden Exponenten, größer als 1, $p = 2\,q + 3$:

$$S_{2q+3}(n) = n^2\,(n+1)^2\,P_q\,[(2\,n+1)^2],$$

wo P ein Polynom des Grades $q-1$ bzw. q des Quadrates von $(2\,n+1)$ bedeutet. Es ist beispielsweise:

$$S_2(n) = \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6},$$

$$S_4(n) = \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{120}\,[3\,(2\,n+1)^2 - 7],$$

$$S_6(n) = \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{672}\,[3\,(2\,n+1)^4 - 18\,(2\,n+1)^2 + 31],$$

$$S_3(n) = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4},$$

$$S_5(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{24}\,[(2n+1)^2 - 3],$$

$$S_7(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{384}\,[3\,(2n+1)^4 - 22\,(2n+1)^2 + 51].$$

Beweis der Formel a). Wir entwickeln die folgende, für $x = 0$ verschwindende, gerade Funktion

$$F_{2q}(x) \equiv \binom{x}{2q} + \binom{-x}{2q}$$

nach Potenzen von x:

$$F_{2q}(x) = A_{2q}\,x^{2q} + A_{2q-2}\,x^{2q-2} + \cdots + A_2\,x^2. \tag{1}$$

Wir setzen in Gleichung (1) $x = 1, 2, 3, \ldots, n$ und summieren. Nun ist:

$$\sum_{1}^{n}{}_{x}\binom{x}{2q} - \binom{n+1}{2q+1} \quad \text{und} \quad \sum_{1}^{n}{}_{x}\binom{-x}{2q} = -\binom{-n}{2q+1}. \tag{2}$$

Denn aus der Beziehung

$$\binom{x}{p} + \binom{x}{2+q} = \binom{x+1}{q+1}$$

ergeben sich, wenn man $x = 1, 2, \ldots, n$ bzw. $x = -1, -2, \ldots, -n$ einsetzt und die entstehenden Gleichungen addiert, die Formeln (2). Demnach erhält man aus Gleichung (1)

$$\binom{n+1}{2q+1} - \binom{-n}{2q+1} = A_{2q}\,S_{2q}(n) + A_{2q-2}\,S_{2q-2}(n) + \cdots + A_2\,S_2(n). \tag{3}$$

Durch die Substitution $n + 1 = (t+1)/2$, also $t = 2n + 1$, geht die linke Seite von (3) über in

$$\binom{\frac{t+1}{2}}{2q+1} - \binom{\frac{-t+1}{2}}{2q+1} = \text{ungerade Funktion von } t.$$

Da diese Funktion für $t = 0;\ \pm 1$ verschwindet, kann der Faktor $t\,(t^2 - 1) = 4\,(2n+1)\,(n^2+n)$ vom Polynom abgetrennt werden. Gleichung (3) kann folglich geschrieben werden:

$$n\,(n+1)\,(2n+1)\,F_{q-1}[(2n+1)^2] = A_{2q}\,S_{2q}(n) + A_{2q-2}\,S_{2q-2}(n) + \cdots + A_2\,S_2(n).$$

Für $q = 1$ wird also:

$$n\,(n+1)\,(2n+1)\,B_0 = A_2\,S_2(n),$$

für $q = 2$:

$$n\,(n+1)\,(2n+1)\,(B_2'\,(2n+1)^2 + B_0') = A_4'\,S_4(n) + A_2'\,S_2(n)$$

usw. Daraus geht hervor, daß die Ausdrücke $S_2(n)$, $S_4(n)$, ... die behauptete Form a) haben müssen.

Beweis der Formel b): Analog bildet man

$$\binom{x}{2q+1} - \binom{-x}{2q+1} = A_{2q+1}\,x^{2q+1} + A_{2q-1}\,x^{2q-1} + \cdots + A_1\,x. \tag{4}$$

Der Koeffizient A_1 läßt sich ermitteln, indem Gleichung (4) in der Form geschrieben wird:

$$\frac{x}{2q+1}\binom{x-1}{2q} + \frac{x}{2q+1}\binom{-x-1}{2q} = A_{2q+1}\,x^{2q+1} + A_{2q-1}\,x^{2q-1} + \cdots + A_1\,x;$$

durch x geteilt und $x = 0$ gesetzt:

$$\frac{1}{2q+1}\binom{-1}{2q} + \frac{1}{2q+1}\binom{-1}{2q} = A_1,$$

also
$$A_1 = \frac{2}{2q+1}.$$

Gleichung (4) lautet jetzt

$$\binom{x}{2q+1} - \binom{-x}{2q+1} - \frac{2}{2q+1}\binom{x}{1} = A_{2q+1}\,x^{2q+1} + A_{2q-1}\,x^{2q-1} + \cdots + A_3\,x^3.$$

Wird $x = 1, 2, \ldots, n$ eingesetzt und summiert, so ergibt sich wegen (2):

$$\binom{n+1}{2q+2} + \binom{-n}{2q+2} - \frac{2}{2q+1}\binom{n+1}{2} = A_{2q+1}\,S_{2q+1}(n) + \cdots + A_3\,S_3(n). \qquad (5)$$

Die linke Seite von Gleichung (5) ist aber gleich

$$\frac{n\,(n+1)}{(2q+1)\,(2q+2)}\left[\binom{n-1}{2q} + \binom{-n-2}{2q} - 2q - 2\right].$$

Durch die Substitution $n - 1 = (t-3)/2$, also $t = 2n + 1$, nimmt der Klammerausdruck folgende Form an:

$$\binom{\frac{t-3}{2}}{2q} + \binom{\frac{-t-3}{2}}{2q} - 2q - 2 = \text{gerade Funktion von } t.$$

Diese gerade Funktion verschwindet aber für $t = \pm 1$, denn

$$\binom{-1}{2q} + \binom{-2}{2q} - 2q - 2 = 1 + 2q + 1 - 2q - 2 = 0.$$

Der Ausdruck ist deshalb durch $t^2 - 1 = 4\,(n^2 + n)$ teilbar, so daß Gleichung (5) wird:

$$n^2\,(n+1)^2 F_{q-1}\,[(2n+1)^2] = A_{2q+1}\,S_{2q+1}(n) + \cdots + A_3\,S_3(n). \qquad (6)$$

Indem man in Gleichung (6) nacheinander $2q + 1 = 3, 5, 7, \ldots$ einsetzt, ergibt sich die Richtigkeit der Formel b).

Die Berechnung der Koeffizienten von $S_p(n)$ wird erleichtert, wenn man sich der Identität bedient:

$$S_p(n) - S_p(n-1) \equiv n^p.$$

H. KREIS, Winterthur.

Zum Drallsatz für den starren Körper[1])

1. *Zum Drallsatz bei ebener Bewegung*

Für die Rotation eines starren Körpers um eine raum- und körperfeste Achse gilt bekanntlich der Drallsatz in der Form:

$$\Theta\,\frac{d\omega}{dt} = M, \qquad (1)$$

[1]) Dieser Artikel ist ein Auszug aus einem vom Verfasser bearbeiteten Paragraphen des demnächst im Reinhardt-Verlag, Basel, erscheinenden Buches *Grundriß der Physik* von Prof. Dr. P. HUBER und Prof. P. FRAUENFELDER.