Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 4 (1949)
Heft: 4

Artikel: Zur Kreisberechnung von Huygens
Autor: Grimm, G.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14324

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Auch hier ist es wieder vorteilhaft, an Stelle der Längen d und e die Verhältniszahlen

$$\frac{d}{r} = k \quad \text{und} \quad \frac{e}{s} = m \tag{16}$$

zu benutzen. Es ist dann

$$\underline{M_4 = r\,s\left[\arccos k + \frac{m\,(1-m)}{1-2\,m-k}\sqrt{1-k^2}\right.}$$

$$\underline{\left. - (1-m)^2\,(1-m-k)\sqrt{\frac{1-k}{(1-2\,m-k)^3}}\arccos\frac{m+k}{1-m}\right]}. \tag{13d}$$

Wir wollen endlich die Ebene der Ellipse durch d und β festlegen und die Verhältniswerte

$$\frac{d}{r} = k \quad \text{und} \quad \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = t \tag{17}$$

verwenden.

Wendet man nun auf das Dreieck, das den Aufriß des Kegelhufes darstellt, den Sinussatz an, so findet man für e die folgende Darstellung durch k und t:

$$e = (r-d)\,\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = s\,\frac{(1-k)\,t}{1+t} \tag{18}$$

und durch Einsetzen dieses Wertes in (13c) schließlich

$$\underline{M_4 = r\,s\left[\arccos k + t\,\frac{1+k\,t}{1-t^2}\sqrt{1-k^2} - \frac{(1+k\,t)^2}{(1-t^2)^{3/2}}\arccos\frac{k+t}{1+k\,t}\right]}. \tag{13e}$$

In dem Sonderfall, daß die gerade Hufkante UV durch den Mittelpunkt des Grundkreises geht, ist $d = 0$ bzw. $k = 0$. Die Formeln für den Mantelinhalt des Drehkegelhufes mit elliptischer Begrenzung haben in diesem besonderen Fall die einfachere Gestalt

$$\underline{M_4^* = \frac{\pi}{2}\,r\,s + r\,\frac{e\,(s-e)}{s-2\,e} - r\,\frac{(s-e)^3}{\sqrt{s\,(s-2\,e)^3}}\arccos\frac{e}{s-e}}, \tag{13c*}$$

bzw.

$$\underline{M_4^* = r\,s\left[\frac{\pi}{2} + \frac{m\,(1-m)}{1-2\,m} - \left(\frac{1-m}{\sqrt{1-2\,m}}\right)^3\arccos\frac{m}{1-m}\right]} \tag{13d*}$$

und

$$\underline{M_4^* = r\,s\left[\frac{\pi}{2} + \frac{t}{1-t^2} - \frac{\arccos t}{(1-t^2)^{3/2}}\right]}. \tag{13e*}$$

(Schluß folgt.) ARNULF REUSCHEL, Wien.

Zur Kreisberechnung von Huygens

HUYGENS' Arbeit *De circuli magnitudine inventa*[1]) erschien im Jahre 1654. Zur Bestimmung der Kreisfläche werden reguläre, dem Kreise einbeschriebene Vielecke verwendet, und die auftretenden Segmente schätzt HUYGENS mit Hilfe von Parabel-

[1]) In deutscher Sprache ist diese Abhandlung enthalten in: F. RUDIO, *Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre* (B. G. Teubner, Leipzig 1892). RUDIO bezeichnet diese Leistung von HUYGENS als eine der schönsten und bedeutendsten elementargeometrischen Arbeiten, die jemals geschrieben worden sind.

segmenten ab. Dieser Gedanke ergibt eine wesentliche Verbesserung der klassischen Kreisberechnung von ARCHIMEDES[1]).

Mit den einfachsten Hilfsmitteln soll im folgenden ein für den Unterricht brauchbarer Zugang zur Huygensschen Kreisberechnung dargestellt werden. Eine Verfeinerung des Verfahrens der Segmentberechnung wird die Rechenarbeit bei der Bestimmung von π erleichtern.

1. *Annäherung des Kreises durch quadratische Parabeln und Parabeln 4. Ordnung*

Im Kreis von Radius r denken wir uns das Segment OAA' mit der Halbsehne $MA = s$ und der Pfeilhöhe $OM = p$. Der Höhensatz ergibt aus dem rechtwinkligen

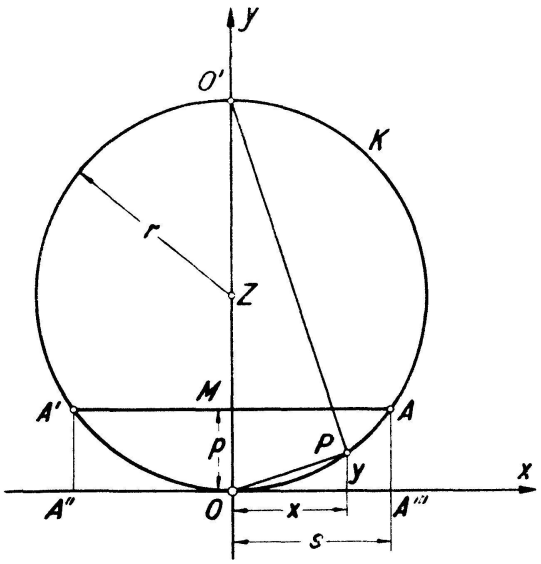

Fig. 1

Dreieck OPO' die Beziehung (Fig. 1)

$$y\,(2\,r - y) = x^2 \tag{1}$$

zwischen den Koordinaten des laufenden Kreispunktes P. Insbesondere folgt aus (1) für $x = s$ und $y = p$,

$$p\,(2\,r - p) = s^2. \tag{1'}$$

Mit der Kreisgleichung (1) würde sich y als Wurzelausdruck in Funktion von x darstellen lassen. Weil diese Form für eine elementare Berechnung der Segmentfläche ungeeignet ist, wollen wir uns mit einer Abschätzung von y durch ganze rationale Funktionen in x begnügen. Aus (1) folgt $y = x^2/(2\,r - y)$, und daraus ergeben sich ohne weiteres die Näherungen

$$\frac{x^2}{2\,r} \leqq y \leqq \frac{x^2}{2\,r - p} = \frac{p}{s^2}\,x^2, \qquad |\,x\,| \leqq s. \tag{2}$$

[1]) K. KOMMERELL, *Das Grenzgebiet der elementaren und höheren Mathematik* (K. F. Koehler, Leipzig 1936), S. 28–34. In diesem gediegenen Werk stellt K. KOMMERELL die Sätze von HUYGENS über die Kreisberechnung in leicht verständlicher Form dar. HUYGENS selbst hat es vermieden, den Grundgedanken seiner Abhandlung anzugeben.

Nach (2) ersetzen wir den Kreisbogen $A'OA$ das eine Mal durch einen Bogen der Parabel $y = x^2/2r$ [1]), das andere Mal durch ein Stück der Parabel $y = p\,x^2/s^2$. Für die erste Hilfskurve ist unser Kreis K der Scheitelkrümmungskreis. Die zweite Parabel berührt K in O und geht, zunächst im Innern des Kreises verlaufend, durch A und A'.

Für den Fehler $\delta(x) = y - (x^2/2r)$ findet man mit Verwendung von (1):

$$\delta(x) = \frac{x^2}{2r - y} - \frac{x^2}{2r},$$

oder

$$\delta(x) = \frac{x^2\,y}{2r\,(2r - y)}. \tag{3}$$

Ersetzen wir im Zähler von (3) das y nach (2) durch seine obere Grenze $(p/s^2)\,x^2$ und wird für das y des Nenners p gesetzt, so folgt,

$$\delta(x) \leqq \frac{p}{2r\,s^2} \cdot \frac{x^4}{2r - p} = \frac{p^2}{2r\,s^4}\,x^4.$$

Wird dagegen das y des Zählers durch die untere Grenze $x^2/2r$ und $2r - y$ durch $2r$ ersetzt, so ergibt sich $x^4/8r^3 \leqq \delta(x)$. Damit finden wir die genauere Abschätzung

$$\frac{x^2}{2r} + \frac{x^4}{8r^3} \leqq y \leqq \frac{x^2}{2r} + \frac{p^2}{2r\,s^4}\,x^4, \qquad |x| \leqq s, \tag{4}$$

von y durch zwei besonders einfache Polynome vierten Grades in x.

2. *Angenäherte Segmentberechnung*

Der Kreisbogen $A'OA$ (siehe Fig. 1) werde zunächst nach (2) durch die Parabel $y = \alpha\,x^2\,(\alpha > 0)$ angenähert. Wie kann der Inhalt des Parabelsegmentes OPQ von Fig. 2 elementar berechnet werden? Man wird zunächst die schraffierte Fläche bestimmen. Das Intervall $0 \leqq x \leqq s$ wollen wir unterteilen durch die Punkte $P_0, P_1, P_2, \ldots$ deren Abszissen $x_0 = s$, $x_1 = sq$, $x_2 = sq^2$, ... $(0 < q < 1)$ eine geometrische Folge bilden. Die zugehörige Obersumme Σ erscheint als Summe einer unendlichen geometrischen Reihe mit dem Quotienten q^3,

$$\Sigma = \frac{\alpha\,s^3\,(1 - q)}{1 - q^3} = \frac{\alpha\,s^3}{1 + q + q^2}.$$

Für die entsprechende Untersumme σ gilt $\sigma = q^2\,\Sigma$. Strebt q gegen 1, so nehmen σ und Σ den gemeinsamen Grenzwert

$$\lim_{q \to 1} \sigma = \lim_{q \to 1} \Sigma = \frac{\alpha\,s^3}{3} = \frac{s\,y_0}{3} \tag{5}$$

an. (5) stellt die schraffierte Fläche dar.

Dieses bekannte elementare Integrationsverfahren läßt sich auch dann anwenden, wenn nach (4) die Näherungskurve

$$y = \alpha\,x^2 + \beta\,x^4 \qquad (a > 0;\ \beta > 0)$$

---

[1]) KOMMERELL verwendet statt dieser Hilfskurve die Parabel, welche K in A und A' berührt.

an Stelle des Kreises tritt. Für die neue Obersumme Σ' und die Untersumme σ' ergibt sich bei derselben Intervalleinteilung

$$\Sigma' = \frac{\alpha s^3}{1+q+q^2} + \frac{\beta s^5}{1+q+q^2+q^3+q^4}$$

und

$$\sigma' = \frac{\alpha s^3 q^2}{1+q+q^2} + \frac{\beta s^5 q^4}{1+q+q^2+q^3+q^4}.$$

$$\lim_{q\to 1} \sigma' = \lim_{q\to 1} \Sigma' = \frac{\alpha s^3}{3} + \frac{\beta s^5}{5} \tag{6}$$

ist die Formel für die gesuchte Fläche.

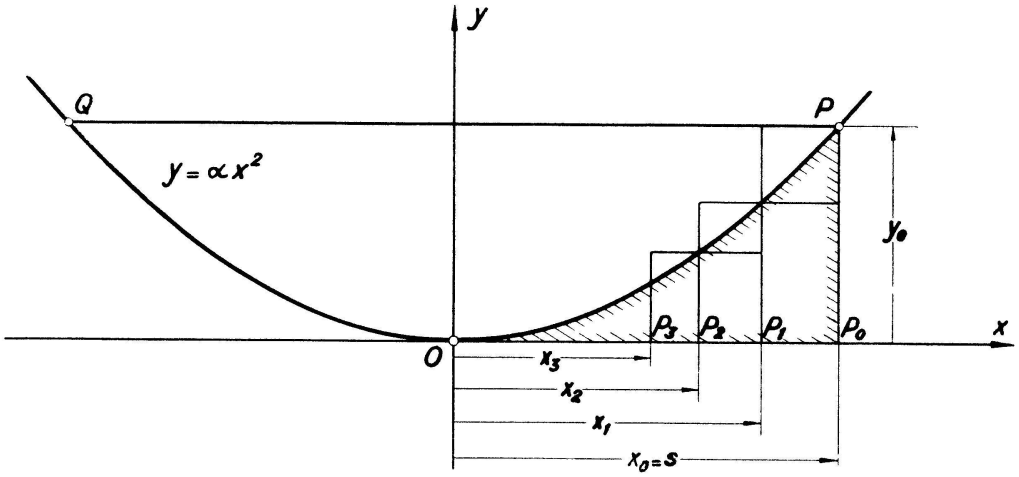

Fig. 2

Halten wir uns an die erste Näherung (2), so muß der Koeffizient α in (5) durch die Werte p/s^2 und $1/2\,r$ ersetzt werden. Durch Subtraktion der doppelten Flächeninhalte (5),

$$\frac{2}{3}\,p\,s \quad \text{und} \quad \frac{s^3}{3\,r} = \frac{p\,s\,(2\,r-p)}{3\,r},$$

vom Rechteck $AA'A''A'''$ (siehe Fig. 1) ergibt sich eine untere und eine obere Grenze für den Inhalt des Kreissegmentes OAA'. Man findet

$$\frac{4}{3}\,p\,s < S < \frac{4}{3}\,p\,s\left(1+\frac{p}{4\,r}\right). \tag{7}$$

Die untere Grenze macht 4/3 vom Inhalt des Dreiecks OAA' aus (Archimedische Segmentformel), und die Differenz der beiden Näherungswerte,

$$d = \frac{p^2\,s}{3\,r} \tag{8}$$

gibt ein Maß für die Genauigkeit der Betrachtung.

Um nach (4) die zweite Näherung zu verwenden, müssen wir in beiden Fällen in (6)

$$\alpha = \frac{1}{2\,r} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{p^2}{2\,r\,s^4} \quad \text{oder} \quad \beta = \frac{1}{8\,r^3}$$

setzen. Daraus erhalten wir für den Inhalt des Kreissegmentes OAA' die schärfere Abgrenzung

$$\frac{4}{3}\,p\,s\left(1+\frac{p}{10\,r}\right) < S < \frac{4}{3}\,p\,s\left(1+\frac{p}{10\,r}+\frac{3\,p^2\,(4\,r-p)}{80\,r^3}\right) \tag{9}$$

mit der Differenz

$$d' = \frac{p^3\,s\,(4\,r-p)}{20\,r^3} \tag{10}$$

der beiden Grenzen.

Bemerkenswert ist die Näherungsformel

$$S \approx \frac{4}{3}\,p\,s\left(1+\frac{p}{10\,r}\right)$$

in (9); sie eignet sich vorzüglich für die Berechnung und Konstruktion der Segmentfläche. Leicht läßt sich der absolute und relative Fehler in eine Reihe entwickeln, die nach Potenzen des halben Zentriwinkels x fortschreitet. Für $x \to 0$ gelten die Äquivalenzen: absoluter Fehler $\sim r^2 x^7/140$, relativer Fehler $\sim (3/280)\,x^4$. Wahrscheinlich ist die Formel nicht neu.

3. *Numerische Ergebnisse*

a) $n = 12$

Dem Kreis vom Radius $r = 1$ werde ein reguläres Zwölfeck einbeschrieben. Die Schenkelhöhe im zugehörigen Bestimmungsdreieck OAB (siehe Fig. 3) beträgt $h = 1/2$. Wir finden damit das bekannte Ergebnis für die Fläche unseres Vielecks, $f_{12} = 3$. Aus $s^2 + \varrho^2 = 1$ und $s\,\varrho = 1/4$ folgt

$$s = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = 0{,}258\,819\,0, \qquad \varrho = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

und

$$p = 1 - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = 0{,}034\,074\,2\ ^{1)}.$$

Bei Verwendung der ersten Näherung (7) gilt für die untere Grenze der zwölf Kreissegmente, $16\,p\,s = 4\,(\sqrt{6}-\sqrt{2}-1) = 0{,}141\,104\,4$. Die entsprechende obere Grenze geht aus diesem Wert nach (8) durch Addition von

$$12\,d = \frac{4\,p^2\,s}{r} = \frac{5\sqrt{6}-3\sqrt{2}-8}{16} = 0{,}001\,202\,0$$

hervor, sie beträgt

$$16\,p\,s\left(1+\frac{p}{4\,r}\right) = 0{,}142\,306\,4\,.$$

Die Zahl π liegt deshalb zwischen den Grenzen

$$3{,}1411 < \pi < 3{,}1423.$$

Für die Anwendung der zweiten Näherung nach (9) benötigen wir den Faktor

$$1+\frac{p}{10\,r} = 1{,}1 - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{40}\,.$$

---

[1]) E. VOELLMY, *Fünfstellige Logarithmen*, Tafeln VI und V (Orell Füßli, Zürich 1948). Soll nur die erste Näherung für die Eckenzahl $n = 12$ allein verwendet werden, so genügen fünf Dezimalen.

Die neue untere Grenze des Inhaltes der 12 Kreissegmente ist gleich

$$16\,p\,s\left(1+\frac{p}{10\,r}\right)=4{,}5\sqrt{6}-4{,}3\sqrt{2}-4{,}8=0{,}141\,585\,2\,.$$

$$12\,d'=\frac{3}{5}\cdot\frac{p^3\,s\,(4\,r-p)}{r^3}=\frac{3}{80}\cdot\frac{(16\,p\,s)\,p^2\,(4\,r-p)}{r^3}=0{,}000\,024\,4$$

kann mit der Tafel V der Quadratzahlen[1]) und mit abgekürzter Multiplikation berechnet werden. Damit ist π in die Grenzen

$$3{,}141\,585<\pi<3{,}141\,610$$

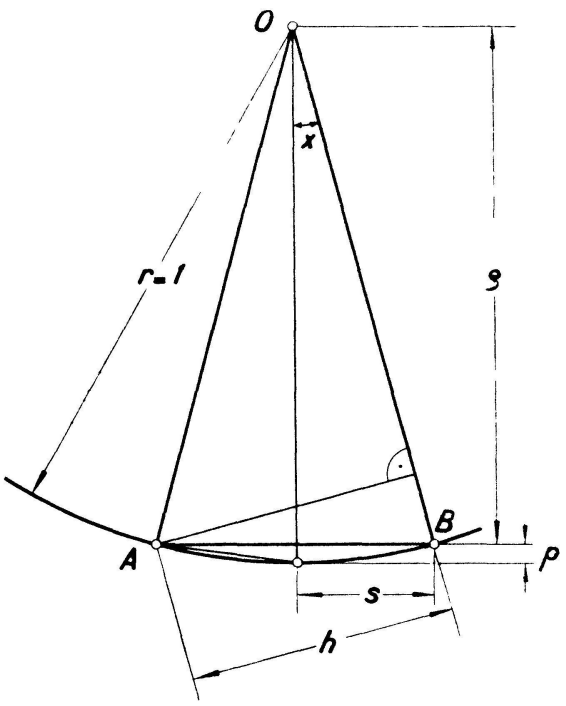

Fig. 3

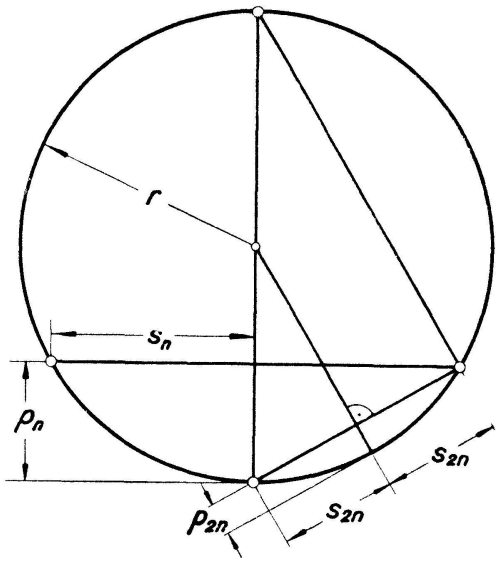

Fig. 4

eingeschlossen und die vier Dezimalen des Näherungswertes $\pi = 3{,}1416$ sind sichergestellt.

b) Verdoppelung von n

Wie erhöht sich die Genauigkeit in der Berechnung der Kreisfläche, wenn die Eckenzahl n des einbeschriebenen regulären Vielecks fortgesetzt verdoppelt wird? s_n und p_n sollen Halbsehne und Pfeilhöhe des Segmentes bedeuten, das zu unserem n-Eck gehört. Aus Fig. 4 folgt nach den Sätzen von EUKLID und PYTHAGORAS

$$s_{2n}=\sqrt{r\,\frac{p_n}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{s_n^2+p_n^2} \tag{11}$$

und $p_{2n}=r-\sqrt{r^2-s_{2n}^2}$. Durch Erweitern des Ausdruckes für $p\cdot 2\,n$ mit $r+\sqrt{r^2-s_{2n}^2}$

[1]) E. VOELLMY, *Fünfstellige Logarithmen*, Orell Füßli, Zürich 1948.

und Verwendung von (11) finden wir die zweckmäßige Formel

$$p_{2n} = \frac{p_n/2}{1 + \sqrt{1 - (p_n/2\,r)}}\,. \tag{12}$$

Mit diesen beiden Verdoppelungsformeln (11) und (12)[1]) läßt sich die folgende kleine Tabelle berechnen. Sie enthält die Werte der Differenzen $D_n = n\,d_n$ und $D'_n = n\,d'_n$ [s. (8) und (10)], aus der oberen und unteren Grenze für π.

n	D_n	D'_n
12	0,001 2	0,000 024
24	0,000 076	0,000 000 39
48	0,000 004 8	0,000 000 006 2

Aus diesen wenigen Zahlen geht die rasche Konvergenz des Huygensschen Verfahrens hervor. Sie soll durch eine asymptotische Betrachtung verständlich gemacht werden. In (11) läßt sich p_n^2 gegen s_n^2 bei hinreichend großem n vernachlässigen; denn es gilt

$$\frac{p_n^2}{s_n^2} = \frac{s_n^2}{(2\,r - p_n)^2} \to 0 \qquad \text{für} \qquad n \to \infty\,.$$

Damit folgt aus (11) oder aus der trigonometrischen Beziehung

$$s_n = r \sin\left(\frac{180^0}{n}\right), \qquad s_{2n} \sim \frac{s_n}{2}\,.$$

Für die Differenzen

$$D_n = \frac{n\,p_n^2\,s_n}{3\,r} = \frac{n\,s_n^5}{3\,r\,(2\,r - p_n)^2} \sim \frac{n\,s_n^5}{12\,r^3}$$

und

$$D'_n = \frac{n\,p_n^3\,s_n\,(4\,r - p_n)}{20\,r^3} = \frac{n\,s_n^7\,(4\,r - p_n)}{20\,r^3\,(2\,r - p_n)^3} \sim \frac{n\,s_n^7}{40\,r^5}$$

findet man hieraus das asymptotische Ergebnis

$$D_{2n} \sim \frac{D_n}{16}, \qquad D'_{2n} \sim \frac{D'_n}{64}\,. \tag{15}$$

Nach (15) nehmen die beiden Folgen $D_n, D_{2n}, D_{4n}, \ldots$ und D'_n, D'_{2n}, D'_{4n} asymptotisch den Charakter von geometrischen Folgen mit den Quotienten 1/16 und 1/64 an.

Das Segment OAA' in Fig. 1 läßt sich durch das Dreieck $ZA'A$ zu einem Sektor ergänzen. Diese Fläche ist gleich dem halben Produkt aus dem Kreisbogen $A'OA$ und dem Radius. Aus (9) gewinnen wir auf diesem Weg eine Abschätzung des Sek-

[1]) (11) und (12) können für genügend große Werte von n durch die beiden elementar beweisbaren Näherungsformeln ersetzt werden:

$$s_{2n} \approx \frac{s_n}{2} + \frac{p_n^2}{4\,s_n}, \qquad \text{Fehler von der Größenordnung} \quad -\left(\frac{p_n^2}{4\,s_n}\right)^2 \cdot \frac{1}{s_n}, \tag{13}$$

$$p_{2n} \approx \frac{p_n}{4} + \left(\frac{p_n}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2\,r}, \qquad \text{Fehler von der Größenordnung} \quad \left(\frac{p_n}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{2\,r^2}\,. \tag{14}$$

tors und des zugehörigen Bogens b. Die Differenz aus b und der entsprechenden Sehne $2s$ liegt in den Grenzen:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{ps}{r}+\frac{4}{15}\cdot\frac{p^2 s}{r^2}<b-2s<\frac{2}{3}\cdot\frac{ps}{r}+\frac{4}{15}\cdot\frac{p^2 s}{r^2}+\frac{p^3 s(4r-p)}{10r^4}. \tag{16}$$

Diese Abschätzung kann für die Berechnung des Kreisumfanges verwendet werden.

G. GRIMM, Herrliberg-Zürich.

Kleine Mitteilungen

I. *Ein topologischer Satz über endliche geschlossene Kurven in der Ebene*

1. Eine Kurve wird endlich genannt, wenn sie eine endliche Bogenlänge besitzt. Wir nehmen im folgenden an, daß die ebenen Kurven C und K endlich, geschlossen und einzügig sind, eine endliche Anzahl ν von Schnittpunkten haben und daß diese Schnittpunkte verschieden sind. Es wird noch angenommen, daß K eine Jordansche Kurve (ohne Doppelpunkt) sei und daß C eine endliche Anzahl von Doppelpunkten besitze. Dann ist $\nu = 2n$ eine gerade Zahl.

Bezeichnen $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ die Schnittpunkte der Kurven C und K und auch ihre Aufeinanderfolge auf der Kurve C bei einer Beschreibung von C, so ist die Aufeinanderfolge dieser $2n$ Punkte auf K eine Permutation P der $2n$ Elemente A_h $(h = 1, 2, \ldots, 2n)$. Bezeichnen A_h^* $(h = 1, 2, \ldots, 2n)$ $2n$ Punkte auf einem Kreis K^*, deren Aufeinanderfolge bei positivem Umlaufen von K^* mit derjenigen der Punkte A_h auf der Kurve K übereinstimmt, gibt es ferner im Kreise K^* unter den n ungeraden bzw. geraden Sehnen

$$A_{2k-1}^* A_{2k}^* \quad \text{bzw.} \quad A_{2k}^* A_{2k+1}^* \qquad (k = 1, 2, \ldots, n;\ A_{2n+1}^* \equiv A_1^*)$$

m_1 bzw. m_2 sich schneidende Sehnenpaare und liegt der Bogen $\widehat{A_1 A_2}$ von C innerhalb von K, so besitzt die Kurve C mindestens m_1 bzw. m_2 Doppelpunkte innerhalb bzw. außerhalb von K.

Zum Beweis dieses Satzes bezeichnen wir mit γ_k bzw. δ_k den Bogen von C zwischen den auf C aufeinanderfolgenden Punkten A_{2k-1}, A_{2k} bzw. A_{2k}, A_{2k+1}. Dann liegen die Bogen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ bzw. $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ innerhalb bzw. außerhalb der Kurve K.

Wir nehmen erstens an, daß sowohl die Punkte A_h und A_h^* als auch die Kurven K und K^* übereinstimmen. Schneiden die Sehnen $A_{2i-1}A_{2i}$ und $A_{2k-1}A_{2k}$ bzw. $A_{2i}A_{2i+1}$ und $A_{2k}A_{2k+1}$ einander, so trennen die Punktpaare $A_{2i-1}A_{2i}$ und $A_{2k-1}A_{2k}$ bzw. $A_{2i}A_{2i+1}$ und $A_{2k}A_{2k+1}$ auf K einander. Dann werden also die Endpunkte des Bogens γ_i bzw. δ_i von den Endpunkten des Bogens γ_k bzw. δ_k auf K getrennt.

Bezeichnet γ_{i0} einen Teilbogen von γ_i mit den Endpunkten A_{2i-1}, A_{2i}, der sich in keinem Punkte schneidet oder berührt, so wird die Kreisscheibe $K \equiv K^*$ von γ_{i0} in zwei Bereiche $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ geteilt. (γ_i kann mit γ_{i0} zusammenfallen.) Trennen die Endpunkte von γ_i die Endpunkte von γ_k, so gehört der eine Endpunkt von γ_k zu $\mathfrak{B}_1$, der andere aber zu $\mathfrak{B}_2$. Der Bogen γ_k muß also den Bogen γ_{i0} mindestens einmal schneiden. Die Schnittpunkte sind Doppelpunkte der Kurve C.

Die Inversion in bezug auf den Kreis $K \equiv K^*$ führt den Bogen δ_k von C in einen innerhalb von K liegenden Bogen δ_k' mit denselben Endpunkten über. Schneiden die Kreissehnen $A_{2i}A_{2i+1}$ und $A_{2k}A_{2k+1}$ einander, so trennen die Endpunkte der Bogen δ_i' und δ_k' auf K einander. Dann haben δ_i' und δ_k' innerhalb von K, und ihre inversen Bogen δ_i und δ_k außerhalb von K mindestens einen Schnittpunkt.

Damit ist der Satz für den Fall $A_h \equiv A_h^*$ $(h = 1, 2, \ldots, 2n)$ bewiesen.

Es gibt offenbar eine topologische (d. h. eine eineindeutige und beiderseits stetige) Transformation T einer beide Kurven C und K enthaltenden Kreisscheibe K_0 auf sich selbst, wodurch die Jordan-Kurve K auf einen Kreis K' abgebildet wird. Führt diese Transformation die Kurve C in die Kurve C' über, so führt sie die Doppelpunkte von