

Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **4 (1949)**

Heft 4

PDF erstellt am: **15.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

les points milieux des diagonales AD , BE , avec les centres des quadrilatères $BCEF$, $CDF A$,

les centres des triangles ABC , BCD , avec les centres des triangles DEF , EFA ,

les centres des triangles ACD , ADE , BDE , avec les centres des triangles BEF , BCF , ACF , ..., passent par le milieu du segment limité par les centres des triangles ACE et BDF que forment les sommets pris alternativement. —

On voit par la formule sous 2° que le nombre des droites PQ augmente très vite avec le nombre des sommets. Ainsi, pour l'icosagone la famille est constituée par 524287 droites.

Dans le cas le plus simple, $n = 3$, la proportion $b)$ de 1° nous montre la propriété bien connue des trois médianes d'un triangle.

4° — Considérons un groupe orthocentrique A, B, C, H et son centre E . Soient G, G', G'', G''' les centres de gravité des triangles $ABC, BCH, CAH, ABH, M', M'', M'''$ les milieux de BC, CA, AB et E', E'', E''' les milieux de AH, BH, CH .

On voit que les droites

$$AG', BG'', CG''', HG, \quad (a) \quad (p = 1, q = 3)$$

$$E'M', E''M'', E'''M''' \quad (b) \quad (p = 2, q = 2)$$

passent par E . Donc, le centre d'un groupe orthocentrique est le centre du cercle des neuf points de ce groupe; en ce cas, les diamètres remarquables de ce cercle (b) et les droites d'EULER (a) constituent la famille de droites. On voit que $\overline{GE} : \overline{EH} = p : q = 1 : 3$.

La propriété de convergence des droites telles que (b) pour quatre points quelconques donne une démonstration générale d'un théorème qu'on peut présenter sous des formes différentes selon les cas (quadrilatère, tétraèdre, triangle avec trois céviennes concourantes).

5° — La considération d'un cinquième point M arbitraire et des centres de gravité K', K'', K''' des triangles MBC, MCA, MAB conduit aisément aux résultats suivants:

1. Les droites $E'K', E''K'', E'''K'''$ et ME concourent en un point O .

2. $\overline{K'O} : \overline{OE'} = \overline{K''O} : \overline{OE''} = \overline{K'''O} : \overline{OE'''} = 2 : 3$.

3. $\overline{MO} : \overline{OE} = 1 : 4$.

D'où le théorème: Les droites qui joignent les points d'EULER de la base d'un tétraèdre avec les centres de gravité des faces opposées concourent sur la droite passant par le centre du cercle des neuf points de cette base et par le sommet opposé du tétraèdre.

G. N. VLAHAVAS, Fareham-Hants.

Aufgaben

Lösung der Aufgabe 7 (diese Zeitschrift 1, 21 [1946]). Man setze die molaren Konzentrationen entsprechend der Dissoziationsgleichung $2 \text{SO}_3 \rightarrow 2 \text{SO}_2 + \text{O}_2$ wie folgt an: $\text{SO}_3: c_v = 2n \text{ Mole/cm}^3$ vor der Reaktion. Dann folgen die Konzentrationen nach der Reaktion zu: $[\text{SO}_3] = 2n(1 - \alpha)$, $[\text{SO}_2] = 2n\alpha$, $[\text{O}_2] = n\alpha$. Totale Molzahl/cm³: $n_t = n(2 + \alpha)$. Damit ergeben sich die Partialdrucke zu $p_1 = 2n(1 - \alpha)RT$, $p_2 = 2n\alpha RT$, $p_3 = n\alpha RT$ und $p_t = n(2 + \alpha)RT$. Hieraus folgt der Bildungsgrad von SO_3 zu:

$$x = \frac{p_1}{p_t} = \frac{2(1 - \alpha)}{2 + \alpha}$$

und das Massenwirkungsgesetz liefert:

$$K'_p = \frac{p_1^2}{p_2^2 p_3} = \frac{(1 - \alpha)^2 (2 + \alpha)}{\alpha^3 p_t}.$$

Drückt man α durch x aus, so folgt:

$$p_t = \frac{27 x^2}{4 K'_p (1 - x)^3}.$$

Korrespondierende Werte von p_t und x bei 1000° K sind:

$x = 75\%$	$p_t = 0,861 \text{ Atm}$	$x = 90\%$	$p_t = 19,3 \text{ Atm}$
80%	1,91 Atm	94%	97,8 Atm
85%	5,11 Atm	95%	172,4 Atm

ANNETTE KLAUS, DORIS MEILI, KURT SCHOLL, Winterthur.

In diesem Zusammenhang seien zwei Berichtigungen zu den Aufgaben 4 und 6 des Artikels *Mathematische Aufgaben aus dem Gebiete der Gasreaktionen* (diese Zeitschrift 7, 65ff. [1946]) mitgeteilt:

Aufgabe 4: $K_c = 825\,000 \text{ cm}^3$ statt $850\,000 \text{ cm}^3$.

Aufgabe 6: Die Drucke bei 322,8° K sind:

$$\begin{aligned} p'_1 &= 176,3 \text{ Torr} & \text{statt} & \quad 715,4 \text{ Torr.} \\ p'_2 &= 440,7 \text{ Torr} & \text{statt} & \quad 1788,4 \text{ Torr.} \end{aligned}$$

Die Lösungen der quadratischen Gleichung lauten:

$$\begin{aligned} x_1 &= 128,2 \text{ Torr} & \text{statt} & \quad 135,7 \text{ Torr.} \\ x_2 &= -454,1 \text{ Torr} & \text{statt} & \quad -1007 \text{ Torr.} \end{aligned}$$

Endresultate:

$$\begin{aligned} p_1 &= 432,5 \text{ Torr} & \text{statt} & \quad 986,8 \text{ Torr.} \\ p_2 &= 312,6 \text{ Torr} & \text{statt} & \quad 1652,7 \text{ Torr.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\text{NO}_2] &= 2,150 \cdot 10^{-5} \text{ Mol/cm}^3 & \text{statt} & \quad 1,207 \cdot 10^{-5} \text{ Mol/cm}^3. \\ [\text{N}_2\text{O}_4] &= 1,553 \cdot 10^{-5} \text{ Mol/cm}^3 & \text{statt} & \quad 2,023 \cdot 10^{-5} \text{ Mol/cm}^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{\text{NO}_2} &= 0,5805 \text{ statt } 0,3739. & \alpha &= 0,4095 \text{ statt } 0,2317. \\ q_{\text{N}_2\text{O}_4} &= 0,4195 \text{ statt } 0,6261. & \bar{M} &= 65,28 \text{ g/Mol statt } 74,69 \text{ g.} \end{aligned}$$

P. FRAUENFELDER.

Aufgabe 43. Für die zu den Dreieckseiten a , b , c parallelen, durch die Seiten begrenzten Tangenten a' , b' , c' des einbeschriebenen Kreises gilt

$$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} = 1.$$

E. ROTHMUND.

Lösung: Es ist
$$\frac{a'}{a} = \frac{h_a - 2q}{h_a} = 1 - \frac{2q}{h_a} = 1 - \frac{a}{s},$$

somit
$$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} = 3 - \frac{a+b+c}{s} = 1.$$

A. MARET, Biel.

Weitere Lösungen sandten ein: L. DESCLOUX (Fribourg), F. GOLDNER (London), R. GUGGENBÜHL (Seminar Küsnacht), L. KIEFFER (Luxemburg), R. LITSCHI (Zürich), R. LAEMMEL (Zürich), K. RIEDER (Riehen), A. SCHWARZ (Seuzach), J. SCHNEIDER (Seminar Küsnacht), F. WAGNER (Bregenz), K. WOLFF (Glarus).

Aufgabe 48. Trouver la limite de

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

quand le nombre entier n augmente indéfiniment.

L. KOLLROS.

Lösung: Die beiden Zahlenfolgen

$$\left(1 + \frac{1}{v}\right)^v < e, \quad \left(1 + \frac{1}{v}\right)^{v+1} > e \quad (v = 1, 2, 3, \dots)$$

führen zu den Ungleichungen

$$\ln \frac{\nu+1}{\nu} < \frac{1}{\nu} < \ln \frac{\nu}{\nu-1}.$$

Setzt man für ν der Reihe nach die Werte $n, n+1, \dots, 2n$ und summiert diese Ungleichungen, so erhält man

$$\ln \left(2 + \frac{1}{n} \right) < \sum_{\nu=n}^{2n} \frac{1}{\nu} < \ln \left(2 + \frac{2}{n-1} \right),$$

woraus sich für den verlangten Grenzwert der Wert $\ln 2$ ergibt. K. RIEDER (Riehen).

Man kann den gegebenen Abschnitt der harmonischen Reihe auch zwischen die Integrale der Funktion $1/x$ für die Grenzen n und $2n+1$ bzw. $n-1$ und $2n$ einschließen oder die bekannte Formel

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \frac{1}{2n} - \frac{\vartheta}{12n^2} + C \quad (0 < \vartheta < 1, C = \text{Eulersche Konstante})$$

anwenden.

Lösungen sandten ein: A. ÄSCHLIMANN (Burgdorf), P. BUCHNER (Basel), L. DESCLOUX (Fribourg), E. FRÜH (Kradolf), F. GOLDNER (London), P. HENRICI (Zürich), E. ROTHMUND (Zürich), A. STOLL (Zürich).

Aufgabe 50. Lieu du centre ω d'un cercle tangent à l'ellipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ et admettant d'autre part, avec elle, deux tangentes communes parallèles entre elles. Le point de contact M d'un tel cercle est le foyer d'une parabole bitangente à l'ellipse, le pôle de contact étant le point ω . J. HADAMARD, Paris.

Lösung. Erster Teil. Der vollständige geometrische Ort besteht aus drei Kurven, nämlich aus zwei mit der Ellipse konzentrischen Kreisen mit den Radien $a+b$ und $a-b$ (a und b Halbachsen der Ellipse) und aus der Podare der Ellipsenevolute aus ihrem Mittelpunkt.

Die Gleichung der Ellipse sei $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ und $P(u; v)$ ein beliebiger vom Nullpunkt $O(0; 0)$ verschiedener Punkt. Der Abstand des Punktes P von einer zu OP parallelen Tangente ändert sich nicht, wenn sich P auf OP verschiebt. Liegt P auf der Ellipse, so ist das Quadrat dieses Abstandes gleich $a^2 b^2 / (u^2 + v^2)$; denn ab ist die Fläche des Parallelogramms, das durch OP und den Berührungshalbmesser der zu OP parallelen Tangente bestimmt wird. Der Zähler ist nun aber auch gleich $b^2 u^2 + a^2 v^2$. Der Ausdruck $(b^2 u^2 + a^2 v^2) / (u^2 + v^2)$ ändert sich ebenfalls nicht, wenn sich P auf OP verschiebt, und bedeutet daher allgemein das Quadrat des fraglichen Abstandes.

Nun ist der geometrische Ort der Mittelpunkte derjenigen Kreise, die durch den beliebigen Punkt $P(u; v)$ gehen und mit der Ellipse zwei parallele Tangenten gemein haben, gegeben durch

$$(x^2 + y^2) [(x-u)^2 + (y-v)^2] - (b^2 x^2 + a^2 y^2) = 0. \quad (1)$$

Man erkennt leicht drei Doppelpunkte dieser Kurve vierter Ordnung, nämlich den Nullpunkt und die beiden absoluten Kreispunkte. Es zeigt sich, daß noch ein vierter Doppelpunkt auftritt, wenn P auf der Ellipse liegt, so daß dann die Kurve in zwei durch den Nullpunkt gehende Kreise zerfällt. In der Tat verifiziert man leicht die Identität der linken Seiten von (1) und (2), falls $(u; v)$ der Ellipsengleichung genügt:

$$\left\{ x^2 + y^2 - \frac{a+b}{a} u - \frac{a+b}{b} v \right\} \left\{ x^2 + y^2 - \frac{a-b}{a} u + \frac{a-b}{b} v \right\} = 0. \quad (2)$$

Als Mittelpunkte und Radien liest man aus (2) ab:

$$\begin{aligned} M_1 \left(\frac{a+b}{2} \cdot \frac{u}{a}; \frac{a+b}{2} \cdot \frac{v}{b} \right) &= M_1 \left(\frac{u}{2} + \frac{b u}{2 a}; \frac{v}{2} + \frac{a v}{2 b} \right), & r_1 &= \frac{a+b}{2}, \\ M_2 \left(\frac{a-b}{2} \cdot \frac{u}{a}; -\frac{a-b}{2} \cdot \frac{v}{b} \right) &= M_2 \left(\frac{u}{2} - \frac{b u}{2 a}; \frac{v}{2} - \frac{a v}{2 b} \right), & r_2 &= \frac{a-b}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Ferner ergibt sich hieraus als Steigungsmaß von M_1M_2 $a^2v/(b^2u)$, d. h. M_1M_2 ist parallel zur Ellipsennormalen n in P . Da $(u/2; v/2)$ die Mitte von OP ist, folgt daraus, daß n die beiden Kreise in Punkten N_1 und N_2 trifft, die O je diametral gegenüberliegen, die also von P gleich weit entfernt sind und vom Nullpunkt den Abstand $a + b$ bzw. $a - b$ haben, und daß beide Kreise durch den Fußpunkt N des Lotes aus O auf n gehen. Bewegt sich P auf der Ellipse, dann beschreiben N_1 und N_2 Kreise um den Nullpunkt mit den Radien $a + b$ bzw. $a - b$, während N die erwähnte Podare beschreibt.

Außerdem erkennt man aus (3), daß ON_1 und ON_2 zur Hauptachse der Ellipse symmetrisch sind. Beschreiben also zwei Punkte, N_1 und N_2 , je einen von zwei konzentrischen Kreisen mit entgegengesetzt gleicher Winkelgeschwindigkeit, dann beschreibt die Mitte P von N_1N_2 eine Ellipse, und N_1N_2 ist Normale in P . Das ermöglicht die Konstruktion eines Ellipsenzirkels mit tangentialer Führung, d. h. für den Gebrauch einer Reißfeder.

Als Abstandsquadrat von P und N_1 bzw. N_2 findet man aus (3) $(bu/a)^2 + (av/b)^2$, und dies ist auch das Quadrat der Länge des zu OP konjugierten Halbmessers; denn bu/a und av/b sind die Koordinaten seines Endpunktes.

Die Koordinaten von P lassen sich aus der Gleichung der Normalen und der Parallelen durch O zur Tangente leicht berechnen und ergeben durch Einsetzung in die Ellipsengleichung als Gleichung der Podaren

$$(x^2 + y^2)^2 (b^2 x^2 + a^2 y^2) = (a^2 - b^2)^2 x^2 y^2.$$

Es ist eine vierblättrige Kurve, die viermal durch den Nullpunkt geht und daselbst die Ellipsenachsen doppelt berührt; sie geht durch die (imaginären) unendlichfernen Ellipsenpunkte, und die absoluten Kreispunkte sind Doppelpunkte.

Zweiter Teil. Durch die Transformation

$$\left. \begin{array}{l} ax = ru \\ by = rv \end{array} \right\}, \quad r = a + b$$

werden den Punkten $P(u; v)$ der Ellipse $b^2 u^2 + a^2 v^2 = a^2 b^2$ eineindeutig die Punkte $Q(x; y)$ des mit der Ellipse konzentrischen Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ zugeordnet.

Sei nun P_1 der Berührungspunkt einer Ellipsentangente aus Q_2 , dann gilt:

$$b^2 u_1 x_2 + a^2 v_1 y_2 = a^2 b^2.$$

Dank der Transformation ist aber

$$u_1 x_2 = u_2 x_1 \quad \text{und} \quad v_1 y_2 = v_2 y_1,$$

so daß auch gilt:

$$b^2 u_2 x_1 + a^2 v_2 y_1 = a^2 b^2,$$

d. h. wenn die Tangente in P_1 durch Q_2 geht, dann geht die Tangente in P_2 durch Q_1 .

Berechnet man P_2 und P_6 als Schnittpunkte der Polaren von Q_1 in bezug auf die Ellipse mit dieser, so ergeben die Vietaschen Gleichungen: $u_2 u_6 = a^4 (b^2 - y_1^2)/p$ und $v_2 v_6 = b^4 (a^2 - x_1^2)/p$, wo zur Abkürzung p für $b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2$ gesetzt ist. Multipliziert man das Abszissenprodukt mit b^2/a , das Ordinatenprodukt mit a^2/b und addiert, so erhält man als Summe $a^2 b^2 (a b r - b x_1^2 - a y_1^2)/p$, und dies ist gleich $-a^2 b^2/r$; denn die runde Klammer ist gleich $-p/r$. Multipliziert man jetzt noch mit $-r$ und beachtet, daß $(r u_6/a; r v_6/b) = (x_6; y_6) = Q_6$ ist, so kommt

$$-b^2 u_2 x_6 - a^2 v_2 y_6 = a^2 b^2,$$

d. h. die Ellipsentangente in P_2 geht durch den Gegenpunkt von Q_6 auf dem Kreise.

Es ergibt sich somit folgendes Bild: Die Ellipsentangente in P_1 schneidet den Kreis in Q_2 und Q_6 , und die zweiten Tangenten aus diesen Punkten schneiden sich auf dem Kreis im Gegenpunkt Q_4 von Q_1 . Die Tangenten aus Q_1 berühren die Ellipse in P_2 und P_6 und schneiden den Kreis zum zweitenmal in den Gegenpunkten Q_3 von Q_6 und Q_5 von Q_2 , und Q_3Q_5 berührt die Ellipse in P_4 . Die Tangendendreiecke $Q_1Q_3Q_5$ und $Q_2Q_4Q_6$ sind symmetrisch in bezug auf den Nullpunkt.

Nach den Ausführungen des ersten Teiles sind die Ellipsenpunkte P zugleich Fußpunkte der Lote aus den entsprechenden Kreispunkten Q auf die Ellipsentangenten in P . Daraus folgt planimetrisch fast unmittelbar, daß im Sechseck der Punkte P die drei Gegenseitenpaare parallel sind zu den Kreisdurchmessern Q_1Q_4 , Q_2Q_5 und Q_3Q_6 . Es bilden daher z. B. Q_1Q_4 und P_1P_2 mit Q_1P_2 gleiche Winkel, ebenso Q_1Q_4 und P_1P_6 mit Q_1P_6 .

Nun geht Q_1Q_4 durch den Mittelpunkt der Ellipse und ist daher ein Durchmesser der Parabel, welche die Ellipsentangenten aus Q_1 in ihren Berührungspunkten P_2 und P_6 berührt. P_1 ist somit der Brennpunkt dieser Parabel.

Dasselbe gilt *mutatis mutandis* von der Abbildung

$$\left. \begin{aligned} a x &= r' u \\ -b y &= r' v \end{aligned} \right\}, \quad r' = a - b$$

der Ellipsenpunkte P auf die Punkte Q des Kreises mit dem Radius $a - b$. Nur daß hier die Tangendendreiecke höchstens dann reell werden können, wenn $a - b > b$ ist. Die Parabeln jedoch bleiben reell, nur ihre Berührung mit der Ellipse kann imaginär werden.

Als spezielles Ergebnis dieses Falles sei noch erwähnt: Die Tangente an die Ellipse mit den Halbachsen a und b ($a > 2b$) in einem ihrer Schnittpunkte mit dem mit ihr konzentrischen Kreise vom Radius $a - b$ schneidet diesen Kreis zum zweitenmal in einem solchen Punkte, dessen Kreistangente zugleich Ellipsentangente ist.

A. STOLL, Zürich.

Die zum gesuchten geometrischen Ort gehörenden Kreise lassen sich sehr einfach auf folgende von Herrn C. BINDSCHEDLER (Küsnacht) angegebene Weise finden:

Unter Berücksichtigung der perspektiven Affinität zwischen Ellipse und Kreis (Achse ist die Tangente t in M) erkennt man sofort, daß die Drehung des Vektors $\overrightarrow{M\omega}$ um 90° (wodurch er zur Affinitätsachse parallel wird) den zu $\overrightarrow{OM} = \mathbf{a}_1$ konjugierten Ellipsenhalbmesser \mathbf{b}_1 ergibt. Aus

$$\overrightarrow{O\omega^2} = (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{M\omega})^2 = a_1^2 + b_1^2 \pm 2 |\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1| = a^2 + b^2 \pm 2ab$$

folgt $\overline{O\omega} = a \pm b$. Der geometrische Ort ist also ein mit der Ellipse konzentrisches Kreispaar.

Verallgemeinerungen des in der Aufgabe angegebenen Satzes wurden von C. BINDSCHEDLER (Küsnacht) und J. P. SYDLER (Zürich) mitgeteilt. Die Ausführungen von Herrn SYDLER werden im nächsten Heft erscheinen.

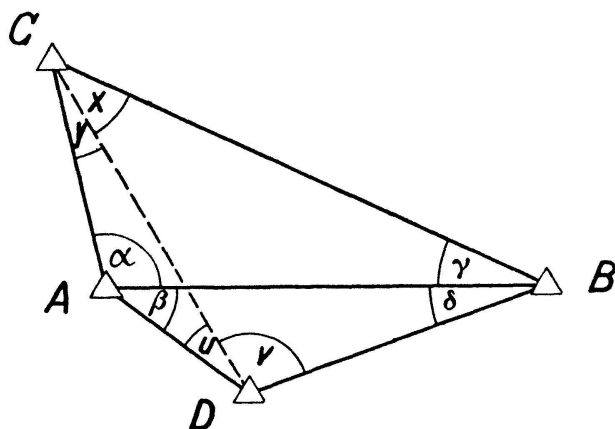
Zur Geschichte des Problems teilt Herr W. LÜSSY (Winterthur) folgendes mit:

Die zum gesuchten geometrischen Ort gehörenden Kreise heißen nach einem Vorschlag von E. N. BARISIEN die Kreise von CHASLES. Eine große Zahl von Eigenschaften dieser Kreise wurde von BARISIEN in *Mathesis* (Gand 1895) aufgezählt. Dort findet sich auf Seite 132 (wohl zum erstenmal) der vollständige geometrische Ort von Aufgabe 50 als ein Satz von E. LEMOINE. Der von Herrn STOLL angegebene Satz über eine Strecke, deren Endpunkte in bestimmter Weise auf den beiden Kreisen wandern, wird auf Seite 158 zitiert; ferner wird er in HJELMSLEV, *Geometrische Experimente* (Teubner, Leipzig 1915) genannt und sehr einfach bewiesen.

Neue Aufgaben

64. Quanti cerchi esistono ortogonali in tre punti ad una cubica piana razionale?
A. LONGHI (Lugano).
65. Gegeben sei eine Kugel K mit dem Radius a . Wir bezeichnen als ein *Zwerchfell* von K denjenigen Teil einer K schneidenden Kugelfläche, der sich innerhalb K befindet.
Man beweise: 1. Alle Zwerchfelle durch den Mittelpunkt von K haben dieselbe Fläche. 2. Kein den Voluminhalt von K halberendes Zwerchfell hat einen Flächeninhalt unterhalb πa^2 .
G. POLYÀ (Stanford, USA.).

66. Anlässlich der städtischen Triangulation von Luzern ergab sich folgendes Problem:
 Von A und B aus (siehe Figur) sind gegenseitig alle Punkte des Triangulationsvierecks mit den Stationen A, B, C, D sichtbar, so daß die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ direkt



A = Allenwinden, B = Dreilinden, C = Sedel, D = Suval (Unfallversicherungsanstalt)

gemessen werden können. Hingegen ist die Visur CD durch eine kleine Erhebung am Rande der Stadt unterbrochen, weshalb die Winkel x, y, u, v berechnet werden müssen. Distanzen sind keine gegeben. – Man stelle eine Formel zur Berechnung des Winkels x auf. Alsdann ergeben sich die übrigen gesuchten Winkel y, u, v als Ergänzungen.

G. HAUSER (Luzern).

Literaturüberschau

BENIAMINO SEGRE:

Lezioni di geometria moderna
 Vol. I (Zanichelli, Bologna 1948)

Il existe déjà plusieurs ouvrages exposant les éléments de la géométrie algébrique; on en doit aux meilleurs spécialistes contemporains de cette branche mathématique: ENRIQUES, SEVERI, VAN DER WAERDEN, GODEAUX. Pourtant M. B. SEGRE a pu faire paraître récemment le premier tome d'un traité consacré à ces mêmes questions en les considérant d'un point de vue nouveau.

Les géomètres ont depuis longtemps l'habitude de représenter tous les êtres géométriques par des systèmes de relations entre des nombres ou coefficients (qui déterminent ces êtres) et des variables ou inconnues. Ils ont introduit, à côté des êtres géométriques les plus naturels (ou réels), des êtres plus abstraits (appelés complexes) représentés par des systèmes de relations analogues dont les coefficients sont des nombres complexes. Depuis plusieurs années apparaît de plus en plus l'intérêt d'élargir encore cette idée: Comme les opérations géométriques font intervenir toutes les opérations rationnelles sur les relations considérées, on est conduit à étudier généralement les êtres géométriques dont les coefficients sont des éléments d'un *corps* quelconque (corps de nombres algébriques, corps de congruences, corps de matrices, corps de fonctions, ...).

Ce point de vue est connu depuis cinquante ans au moins et a été exposé notamment par HILBERT dans ses études sur les fondements de la géométrie. Mais son utilité s'est révélée surtout ces dernières années et c'est pourquoi les traités de géométrie algébrique ont pu l'ignorer jusqu'ici. Il est maintenant couramment employé dans des travaux géométriques (comme ceux de l'auteur, de VAN DER WAERDEN, de ZARISKI, d'A. WEIL, ...), mais il n'en existait que des exposés fort difficiles à étudier sans initiation préalable.

Le livre de M. SEGRE comble cette lacune: il a le grand mérite d'introduire le lecteur dans ces questions très abstraites sans négliger le concret. On suivra l'auteur avec