Über das Rechnen mit Größen

Autor(en): **Roth-Desmeules, E.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **4 (1949)**

Heft 5

PDF erstellt am: **11.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-14326

Polardreieck. Dreht sich in Fig. 17 XY um den Punkt S, so beschreiben somit die Nebenecken X', Y' des vollständigen Viereckes $ABXY$ die Polare s von S; ferner sind X', Y' konjugiert, beschreiben also die von k auf s erzeugte Punktinvolution[1]). Die Punkte U_1, V_1 in Fig. 16 sind hierbei diejenigen zugeordneten Punkte dieser Involution, welche deren Mittelpunkt C und den unendlichfernen Punkt von s harmonisch trennen.

Hiermit haben wir einen anschaulichen Überblick über sämtliche imaginäre Punkte und Tangenten eines reellen Kegelschnittes gewonnen. Es ist leicht, dies auch auf nullteilige Kegelschnitte zu übertragen. Im folgenden wollen wir uns aber den imaginären Elementen im Raume zuwenden. (Schluß folgt.) L. LOCHER-ERNST, Winterthur.

Über das Rechnen mit Größen

1. *Größen*

Bereits im täglichen Leben und viel mehr noch in der Physik und in den Naturwissenschaften kommen wir in die Lage, Größen (Längen, Flächen, Zeiten, Kräfte, Energien, Spannungen usw.) zu messen. Dabei untersuchen wir, wie oft eine Einheit derselben Art in der gegebenen Größe enthalten ist. Wir bestimmen also eine *Quantität,* die einen reinen Zahlenwert darstellt. Die Größe besitzt aber auch eine *Qualität,* die in vernünftiger Weise der Zahl zuzuordnen ist. Eine Größe – wir beschränken uns hier auf die physikalischen – hat demnach immer zwei Merkmale: Quantität und Qualität.

Für jede Art von Größen könnten wir eine beliebige Einheit (cm, m^2, s, kg usw.) wählen und damit die Erscheinung zahlenmäßig erfassen. So könnten wir mit einem quadratischen Blech von 1 m Seitenlänge Flächen ausmessen. Für eine wissenschaftliche Erkenntnis genügt dies allein nicht, zudem wäre die Messung praktisch oft kaum ausführbar. Gewisse Größen verschiedener Art können nach bestimmten, in diesem Falle physikalischen Gesetzen zusammenhangen, und dies gilt auch für ihre Einheiten. Der Wunsch, die Größen und ihre Einheiten zu ordnen, führt zu den Begriffen Dimension und Maßsystem.

Es stellt sich hier die oft aufgeworfene Frage, ob zum Beispiel der Ausdruck $F = a \cdot b$ für die Fläche eines Rechteckes bloß eine reine Zahlengleichheit darstelle oder ob die Größen als solche in Verbindung treten. Die Antwort erscheint nicht eindeutig, da manche Schulbücher in dieser Hinsicht unklar oder inkonsequent sind. So werden in einem bekannten Geometrielehrbuch[2]) die Strecken $a, b, c, \ldots$ durchweg als Größen behandelt, während im Ausdruck $a \cdot b$ für a und b nur noch die Maßzahlen zugelassen werden[3]).

---

[1]) Ein nicht ausgearteter Kegelschnitt k erzeugt auf jeder reellen Geraden s seiner Ebene eine Involution, nämlich die Involution konjugierter Punkte auf s. Ist die Involution hyperbolisch, so stellen die Doppelpunkte die diesfalls reellen Schnittpunkte von s mit k dar. Ist die Involution elliptisch, so sind ihre imaginären Doppelpunkte die gemeinsamen Punkte von s und k.

[2]) F. GONSETH und P. MARTI, *Planimetrie,* 1. Teil (Zürich 1933), S. 137–139. Ebenso W. BENZ, *Stereometrie* (Zürich 1938), S. 172.

[3]) Dagegen wird im Buch von L. LOCHER-ERNST, *Differential- und Integralrechnung* (Basel 1948) ausdrücklich auf Größengleichungen eingegangen.

Andere Bücher[1]) lassen überhaupt nur reine Zahlenbeziehungen gelten und lösen damit das Problem auf ihre Weise. Ein Physikbuch[2]), das im allgemeinen die Größengleichungen verwendet, enthält unvermittelt die Formel für den Weg einer Kugel in einer Fallrinne in der Form $s = 10 \cdot t^2$, die so nur als Zahlengleichung einen Sinn behält.

Das Ziel der nachfolgenden Betrachtungen besteht darin, darauf hinzuweisen, daß bei Zugrundelegung eines zweckmäßigen Maßsystems jede physikalisch richtige Beziehung als Größengleichung aufgefaßt werden darf.

2. *Abstrakter Aufbau eines Größensystems*

Im Folgenden betrachten wir irgendwelche (physikalischen) Größen, die wir mit A, B, C, ... bezeichnen wollen. Es gelten die nachstehenden grundlegenden Beziehungen[3]).

a) Die Größen erfüllen die üblichen *Gleichheitsrelationen* (Symmetrie, Reflexivität, Transitivität), und es gilt das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten:

$$\text{entweder} \quad A = B \quad \text{oder} \quad A \neq B.$$

b) *Gleichartige* Größen A_a und A_b (z. B. Kräfte) lassen sich miteinander zu einer resultierenden Größe verknüpfen. Diese *intensive* Verknüpfung sei symbolisch durch

$$A_a * A_b$$

wiedergegeben. In bezug auf diese Komposition bilden die gleichartigen Größen eine Abelsche Gruppe[4]). Setzt man m gleichartige Größen A zusammen, so lassen sich Potenzen — für die die üblichen Gesetze gelten — definieren

$$\underset{1}{\underbrace{A}} * \underset{2}{\underbrace{A}} * \cdots * \underset{m}{\underbrace{A}} = \overset{m}{A^*},$$

wo A als Einheit, m als Maßzahl (Maß für die Intensität der Größe) aufgefaßt werden kann.

c) Verschiedenartige oder mehrere gleichartige Größen können durch ihr Zusammenwirken eine neue Größe bestimmen, wie zum Beispiel Masse und Beschleunigung im Newtonschen Gesetz. Wir bezeichnen dies als *qualitative* Verknüpfung und schreiben

$$A \circ B.$$

Dadurch entsteht wiederum eine Abelsche Gruppe. Wie oben lassen sich Potenzen einführen, die durch das qualitative Zusammenwirken gleichartiger Größen entstehen

$$\underset{1}{\underbrace{A}} \circ \underset{2}{\underbrace{A}} \circ \cdots \circ \underset{m}{\underbrace{A}} = \overset{m}{A^\circ}.$$

---

[1]) H. FRICK, *Planimetrie* (Zürich 1945).

[2]) U. SEILER und W. HARDMEIER, *Lehrbuch der Physik*, 1. Teil (Zürich 1943).

[3]) Im Gedankengang und in den Bezeichnungen folgt dieser Abschnitt zunächst M. LANDOLT, *Größe, Maßzahl und Einheit* (Zürich 1943).

[4]) Das Kompositionsgesetz erfüllt die Gruppenpostulate: Eindeutigkeit, assoziatives und kommutatives Gesetz, Existenz des Einselementes (Neutralelementes) und des inversen Elementes.

d) Entscheidend ist die folgende Forderung: Ändert von zwei qualitativ verknüpften Größen A und B die eine ihre Intensität, so ändert die resultierende Größe ihre Intensität im selben Maße:

$$\overset{m}{A^*} \circ B = \overset{m}{(A \circ B)^*}.$$

Eine analoge Beziehung für die intensive Verknüpfung ist nicht möglich, ebensowenig für eine qualitative Änderung der einen Größe bei intensiver oder qualitativer Verknüpfung. Daraus ergibt sich die *Distributivität* der qualitativen Verknüpfung in bezug auf die intensive Verknüpfung:

$$\left(\overset{m}{A^*} * \overset{n}{A^*}\right) \circ B = \left(\overset{m}{A^*} \circ B\right) * \left(\overset{n}{A^*} \circ B\right),$$

und im weitern gilt die wichtige Beziehung

$$\overset{m}{A^*} = \overset{m}{E^*_\circ} \circ A. \tag{1}$$

Eine beliebige Größe $\overset{m}{A^*}$ entsteht also durch qualitative Verknüpfung der Einheit A und der intensiven Potenz $\overset{m}{E^*_\circ}$ des qualitativen Neutralelementes $E_\circ$.

e) Wir haben somit einen Bereich vor uns, der zwei Abelsche Gruppen in sich vereinigt, die durch das Distributivgesetz verknüpft sind. Es handelt sich also um einen *Körper*, und wir dürfen die üblichen Namen und Bezeichnungen einführen.

Durch qualitative Verknüpfung oder, wie wir jetzt sagen wollen, durch Multiplikation der intensiven Potenzen des qualitativen Neutralelementes erhalten wir einen Körper, der isomorph dem Körper P der rationalen Zahlen ist

$$\left\{\overset{m}{E^*_\circ}\right\} \cong P.$$

Wir haben die eineindeutige Abbildung

$$\overset{m}{E^*_\circ} \longleftrightarrow m.$$

Daraus ergibt sich

$$\overset{m}{E^*_\circ} * \overset{n}{E^*_\circ} \longleftrightarrow m + n \quad \text{(intensive Verknüpfung} \longleftrightarrow \text{Addition)}$$

und $$\overset{m}{E^*_\circ} \circ \overset{n}{E^*_\circ} \longleftrightarrow m \cdot n \quad \text{(qualitative Verknüpfung} \longleftrightarrow \text{Multiplikation).}$$

Speziell gilt für die neutralen Elemente

$$E_\circ \longleftrightarrow 1, \qquad E_* \longleftrightarrow 0.$$

Übertragen wir die gefundenen Beziehungen auf den Gesamtbereich der Größen, so wird aus (1)

$$\overset{m}{A^*} = \overset{m}{E^*_\circ} \circ A \sim m \cdot A. \tag{2}$$

Dies bedeutet: Die Größe $\overset{m}{A^*}$ läßt sich als Produkt aus der Maßzahl m und der Einheit

A darstellen[1]). Es folgen nun noch die Abbildungen

$$\left.\begin{array}{c} \overset{m}{A^*} * \overset{n}{A^*} = \overset{m+n}{A\ *} \sim m\,A + n\,A = (m+n)\,A \\ \overset{m}{A^*} \circ \overset{n}{B^*} = (A \circ B) \overset{mn}{*} \sim m\,A \cdot n B = m n \cdot A B \\ \overset{m}{A^\circ} \sim A^m \end{array}\right\} . \tag{3}$$

Mit andern Worten, mit den Maßzahlen und den Einheiten von Größen rechnet man, *als ob* es Buchstabengrößen im Sinne der gewöhnlichen Algebra wären.

Im wesentlichen liegt also folgendes vor: Mit Hilfe der unendlichen zyklischen Gruppe der qualitativen Potenzen A^n der Größe A und des Ringes R der rationalen (oder rellen) Zahlen wird der Polynomring $R[A]$ konstruiert, der aus allen endlichen (hier sogar eingliedrigen) Polynomen $\sum_n a_n A^n$ mit $a_n \in R$ besteht. In diesem Ring bilden übrigens die Polynome nullten Grades $a_0 A^0 \sim a_0$ einen zum gegebenen Ring R isomorphen Unterring R'. Da der Polynomring kommutativ und nullteilerfrei ist (notwendige und hinreichende Bedingung), kann er erweitert werden zum Quotientenkörper $R(A) = \{P/Q\}$, wo $P, Q \in R[A]$. Wir erhalten damit den Körper der gebrochenen rationalen Funktionen in der Unbestimmten A. Die Größe A genügt zudem keiner algebraischen Gleichung mit Koeffizienten aus R, so daß es sich um eine *einfache transzendente Erweiterung* des Körpers K der rationalen (reellen) Zahlen handelt, und es gilt die Isomorphie

$$K(A) \cong R(A).$$

Sind mehrere voneinander unabhängige Größen $A, B, C, \ldots$ gegeben, so kann durch sukzessive Adjunktion der Körper

$$K(A, B, C, \ldots)$$

gebildet werden. Für die Elemente dieses Körpers gilt das übliche Rechnen mit Polynomen, womit das formale Rechnen mit Größen gerechtfertigt erscheint.

3. *Maßsysteme*

Für die Physik – der hier die messende Geometrie untergeordnet werde – zeigt es sich, daß es überflüssig ist, für jede Größenart eine neue, unabhängige Einheit einzuführen. Infolge der bestehenden Gesetze und den eingeführten Definitionen ergeben sich zwischen den «Qualitäten» Beziehungen, die durch die Dimensionsformeln angegeben werden. Damit können alle Dimensionen auf gewisse frei wählbare Grunddimensionen zurückgeführt werden, deren Anzahl je nach dem Gebiet verschieden ist:

Geometrie 1 (Länge L),
Kinematik 2 (Länge L und Zeit T),
Mechanik und Wärmelehre[2]) 3 (Masse M, Länge L und Zeit T),
Elektromagnetik 4 (Länge L, Zeit T, Elektrizitätsmenge Q und magnetischer Fluß Φ[3]).

---

[1]) Diese lineare Zuordnung genügt als einzige der logischen Forderung, daß das Verhältnis zweier gleichartiger Größen unabhängig von der Wahl der Einheit sein soll.

[2]) F. Häberli, Schweiz. Arch. angew. Wiss. Techn. *14*, 97 (1948).

[3]) P. Kalantaroff, *Les équations aux dimensions des grandeurs électriques et magnétiques*, Rev. gén. Electr. *25*, 235 (1929).

Die Anzahl der Grunddimensionen ist die Differenz der Anzahl der voneinander verschiedenen Größen und der Zahl der entsprechenden unabhängigen Definitionsgleichungen. Wählt man zu wenig Grunddimensionen, dann entsteht ein mehrdeutiges Maßsystem, in welchem einer Größe mehr als eine abgeleitete Dimension zugeordnet werden kann[1]).

Aus den Dimensionsformeln ergeben sich nach der Regel der dimensionellen Kohärenz[2]) direkt die Einheiten. So hat die Geschwindigkeit die Dimension $[L T^{-1}]$, aus der als Einheit $\mathrm{m\,s^{-1}}$ folgt.

Benützt man ein derart gebautes Maßsystem, dann lassen sich alle Beziehungen sowohl als *Zahlengleichungen* als auch als *Größengleichungen* auffassen. Die Beziehungen sind quantitativ und qualitativ korrekt. Beispiel einer Größengleichung: die kinetische Energie

$$E = \frac{1}{2}\, m v^2.$$

Auf Grund von (2) erhalten wir die Produktengleichung

$$E_n\,[M L^2 T^{-2}] = \frac{1}{2}\, m_n [M]\, v_n^2 [L T^{-1}]^2,$$

die sich in zwei selbständige Gleichungen zerlegen läßt:

1. Algebraische Zahlenwertgleichung:

$$E_n = \frac{1}{2}\, m_n\, v_n^2.$$

2. Einheitengleichung:

$$\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}} = \mathrm{kg} \cdot (\mathrm{m\,s^{-1}})^2.$$

Über die vieldiskutierte Wahl der Grunddimensionen brauche ich hier nichts zu sagen, sind doch jetzt die Schwierigkeiten durch das System von KALANTAROFF[3]) weitgehend behoben, das gleichzeitig die Anforderungen der Mechanik und der Elektromagnetik erfüllt und außerdem den Vorteil aufweist, daß in den Dimensionsformeln nur ganzzahlige Exponenten auftreten.

4. *Geometrische Natur der Größen*

Es darf nicht verschwiegen werden, daß die Dimensionsformeln der Größen uns über die geometrische Natur derselben nicht orientieren können. Geometrisch verschiedenen Größen kann dieselbe Dimensionsformel zugeordnet sein, wie etwa der Arbeit (Skalar) und dem Drehmoment (schiefsymmetrischer Tensor 2. Stufe[4])). Ein näheres Eingehen würde zu weit führen, da eine wesentliche Abhängigkeit von der

---

[1]) Vgl. z. B. F. HÄBERLI, *Physikalische Größen*, Schweiz. Arch. angew. Wiss. Techn. *13*, 136 (1947).

[2]) E. BODEA, *Giorgis rationales MKS-Maßsystem mit Dimensionskohärenz* (Birkhäuser, Basel 1949).

[3]) P. KALANTAROFF, l. c.

[4]) Diese Zweideutigkeit der Dimensionsformel läßt sich vermeiden, indem wir auch dem Winkel eine Dimension zuordnen, was möglich ist, wenn zwischen radialen und tangentialen Längen ein Unterschied gemacht wird.

zugelassenen Transformationsgruppe besteht, so daß bloß auf die Literatur hingewiesen sei[1]).

In dieser Beziehung besteht eine gewisse Analogie mit den chemischen Formeln. Jeder physikalischen Größe entspricht eindeutig eine Dimensionsformel, ebenso ist jedem Stoff seine chemische Formel zugeordnet. Umgekehrt kann aber aus der Gleichheit der Formel nicht auf die Wesensgleichheit der Stoffe geschlossen werden: Isomerie; erst die Strukturformel gibt Aufschluß.

5. *Schlußbemerkungen*

Über das System der physikalischen Größen sind unzählige Abhandlungen und Bücher veröffentlicht worden, die teils die Maßsysteme, teils das Rechnen mit Größen zum Gegenstand haben. Besonders letzteres hat zu vielen Kontroversen Anlaß gegeben. Die einen Autoren[2]) betrachten die physikalischen und geometrischen Gleichungen nur als reine Zahlengleichungen, die andern[3]) dagegen als Größengleichungen, die auch die Dimensionen mit einbeziehen. Wie wir im zweiten Abschnitt gesehen haben, läßt sich die zweite Auffassung mit Recht vertreten.

Eine gewisse Schwierigkeit besteht immerhin, und zwar liegt sie auf erkenntnistheoretischem Gebiet: Die Geschwindigkeit hat die Dimension $[LT^{-1}]$ und damit die Einheit $\mathrm{m\,s^{-1}}$. Da sowohl Meter als Sekunden Qualitäten bedeuten, so stehen wir hier vor der Aufgabe, Qualitäten durcheinander zu dividieren. Dies ist natürlich nicht ausführbar, ebensowenig können wir Qualitäten als solche miteinander multiplizieren. Wir dürfen aber nicht vergessen, daß die Dimension einer Größe nur *symbolischer Ausdruck* ist für eine Qualität, gewissermaßen ein Modell oder Bild. Das Bild ist aber noch lange nicht die Größe selbst, das heißt das «Ding an sich». Deshalb dürfen auch die Operationen, die mit den Dimensionen ausgeführt werden, nicht wörtlich auf die Qualitäten als solche übertragen werden. – Die Physik ist ja auch nur ein Modell der Wirklichkeit.

Lehnt man das Rechnen mit Größen ab, so wird übrigens die obenerwähnte Schwierigkeit bloß auf die Einheiten zurückverschoben. Wie wäre sonst die Bezeichnung cm^2 oder cm^3 für die Flächen- oder Volumeneinheit zu verstehen? Man müßte konsequent jede Einheit als selbständige Größe auffassen (und zum Beispiel ein Volumen mittels einer Volumeneinheit messen, statt aus drei einfachen Längenmessungen *berechnen*), wodurch jeder Zusammenhang verloren ginge und ein wissenschaftlich wertloses Gewirr von Einheiten entstehen würde.

Die Verwendung von Größengleichungen bietet dagegen manche *Vorteile*.

a) Die Dimensionsgleichung gibt eine *Kontrolle* für die Richtigkeit der physikalischen und geometrischen Beziehungen, da diese in bezug auf die Dimensionen homogen sein müssen. Man denke etwa an die Formeln für die Oberfläche der Kugelhaube, das Volumen des Kegelstumpfes oder den schiefen Wurf.

---

[1]) H. DORGELO und J. A. SCHOUTEN, *On units and dimensions*, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. *49*, 123, 282, 393 (1946). — J. A. SCHOUTEN, *Über die geometrische Deutung von gewöhnlichen p-Vektoren und ($W \sim p$)-Vektoren und den korrespondierenden Dichten*, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. *41*, 709 (1938).

[2]) H. DIESSELHORST, *Das System der physikalischen Formeln*, in: MÜLLER-POUILLET, *Handbuch der Physik*, Bd. 1 (Braunschweig 1929), S. 186.

[3]) J. WALLOT, *Dimensionen, Einheiten, Maßsysteme*, in: GEIGER und SCHEEL: *Handbuch der Physik*, Bd. 2 (Berlin 1926), S. 1.

b) Mit Hilfe von Dimensionsbetrachtungen lassen sich, abgesehen von Konstanten oder Funktionen dimensionsloser Zahlen, *unbekannte Beziehungen* zwischen physikalischen Größen finden. So können wir die Form des Ausdruckes für die Schwingungsdauer $T = 2\pi\sqrt{l/g}\, f(\alpha)$ des mathematischen Pendels finden, ebenso die Stokessche Formel $W = 6\pi\eta r v$ für den Reibungswiderstand einer Kugel oder das Luftwiderstandsgesetz $W = c \cdot m(\varrho v^2/2)\, \psi(v/a)$ der Ballistik (m: Masse, ϱ: Dichte, v: Geschoßgeschwindigkeit, a: Schallgeschwindigkeit, c: Formfaktor, v/a ist eine reine Zahl). Dimensionsanalytisch sind die auftretenden konstanten Faktoren oder die Funktionen $f(\alpha)$ bzw. $\psi(v/a)$ nicht bestimmbar, sie folgen erst aus der Theorie oder aus dem Experiment.

Wichtig ist ferner, daß eine dimensionsbehaftete Größe nie als Exponent[1]) oder als Argument einer transzendenten Funktion (trigonometrische Funktionen, Logarithmus) auftreten kann. Einem solchen Ausdruck könnte gar kein Sinn beigelegt werden. Als Beispiel sei das Gesetz wiedergegeben, das den Luftdruck p in der Höhe z über der Erde ermitteln läßt, wenn die lineare Abnahme der Erdbeschleunigung und der Temperatur mit der Höhe berücksichtigt wird:

$$p(z) = p_0 \left(\frac{T_0 - \lambda z}{T_0}\right)^{\frac{g_0}{\lambda A}\left(1 - \frac{2T_0}{R\lambda}\right)} e^{-\frac{2g_0}{AR\lambda} z}.$$

Es bedeuten: $T_0 = 284°$ Temperatur am Boden, $\lambda = 0{,}000055$ Grad cm^{-1} Temperaturgradient, z Höhe in Zentimetern, $g_0 = 981$ cm s^{-2} Erdbeschleunigung am Boden, $A = 2{,}87 \cdot 10^6$ cm^2 s^{-2} Grad^{-1} spezifische Gaskonstante, $R = 6{,}37 \cdot 10^8$ cm Erdradius. Setzen wir überall die richtigen Dimensionen ein, so stehen als Faktoren von p_0 (Druck am Boden) nur dimensionslose Größen, und die Exponenten sind ebenfalls dimensionslos.

c) Die auf der physikalischen Ähnlichkeitstheorie fußenden *Modellversuche* der Aero- und Hydrodynamik besitzen zur Grundlage ebenfalls die Dimensionstheorie, was hier nur nebenbei erwähnt sei.

Zusammenfassend sei gesagt, daß das formale Rechnen mit Größen, bei Zugrundelegung eines gewissen Forderungen entsprechenden Maßsystems, völlig gerechtfertigt und bequem ist. Allerdings bedeutet dieses Vorgehen eine Abstraktion; in der Mathematik hat man sich aber schon lange daran gewöhnt, eine Operation als Addition oder Multiplikation zu bezeichnen, sobald – und das ist das Wesentliche – die formalen Gesetze (manchmal auch nur teilweise) erfüllt sind. Man denke bloß an die Mengenlehre, Gruppentheorie, mathematische Logik, Theorie der Verbände (Strukturtheorie). – Außerdem wohnt den Größengleichungen ein heuristischer Wert inne.

E. ROTH-DESMEULES, Luzern.

---

[1]) Dies beruht darauf, daß das Differentialgesetz die Form $dp/p = \cdots$ hat, also auf beiden Seiten schon dimensionslose Größen stehen müssen.