

Quasiarithmetische Mittelwerte

Autor(en): **Jecklin, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **4 (1949)**

Heft 5

PDF erstellt am: **14.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-14327>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Quasiarithmetische Mittelwerte

I. Sind $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ reelle Größen, so ist bekanntlich ihr arithmetisches Mittel definiert als

$$m = \sum_1^n \frac{x_i}{n}. \quad (1)$$

Unter einem einfachen quasiarithmetischen Mittel versteht man sodann eine Mittelbildung, welche sich aus der Gleichsetzung

$$n f(m) = \sum_1^n f(x_i) \quad (2)$$

ergibt, also von der Gestalt ist

$$m = \varphi \left(\sum_1^n \frac{f(x_i)}{n} \right),$$

worin φ die Umkehrfunktion von $f(x)$ bedeutet, d. h. $\varphi[f(x)] = x$. Damit die Mittelbildung eindeutig durchführbar ist, muß $f(x)$ in dem zu mittelnden Intervall notwendigerweise reell, eindeutig, stetig, endlich und streng monoton sein¹⁾. Die einfachen quasiarithmetischen Mittel sind symmetrische Funktionen der x_i .

Wir nennen vorerst drei Eigenschaften der quasiarithmetischen Mittel, die wir im folgenden benötigen:

a) Haben wir einen Mittelwert gemäß (2) und sind k_i ($i = 1, 2, \dots, n$) positive Konstanten, so ist auch

$$m = \varphi \left(\frac{\sum k_i f(x_i)}{\sum k_i} \right) \quad (3)$$

ein Mittelwert, und zwar ein gewogenes quasiarithmetisches Mittel. Denn ist $f(x)$ monoton steigend, so ist

$$f(x_1) \sum k_i \leq \sum k_i f(x_i) \leq f(x_n) \sum k_i.$$

Aber ist $f(x)$ monoton fallend, so ist

$$f(x_1) \sum k_i \geq \sum k_i f(x_i) \geq f(x_n) \sum k_i.$$

In beiden Fällen aber ist ²⁾

$$x_1 \leq \varphi \left(\frac{\sum k_i f(x_i)}{\sum k_i} \right) \leq x_n.$$

Die gewogenen Mittel sind nicht mehr symmetrische Funktionen der x_i .

b) Die quasiarithmetische Mittelbildung ist gegenüber linearer Transformation von $f(x)$ invariant, d. h. wenn in (3) die Funktion $f(x)$ durch $a f(x) + b$, wobei a und b konstant, ersetzt wird, so ändert sich der Wert des Mittels nicht. Denn aus

$$[f(m) a + b] \sum k_i = \sum \{k_i [f(x_i) a + b]\}$$

¹⁾ G. AUMANN, *Aufbau von Mittelwerten mehrerer Argumente*, Math. Ann. 109 (1933).

²⁾ H. JECKLIN, *Der Begriff des mathematischen Mittelwertes und die Mittelwertformeln*, Vjschr. naturf. Ges. Zürich 93, 1 (1948).

folgt unmittelbar

$$m = \varphi\left(\frac{\sum k_i f(x_i)}{\sum k_i}\right).$$

c) Bei der Bildung quasiarithmetischer Mittel darf eine Anzahl der zu mittelnden Größen x_i durch ihren Teilmittelwert ersetzt werden, d. h. es ist

$$m = \varphi\left(\frac{\sum_1^n k_i f(x_i)}{\sum_1^n k_i}\right) = \varphi\left(\frac{f(\bar{x}) \sum_1^h k_i + \sum_{h+1}^n k_i f(x_i)}{\sum_1^n k_i}\right), \quad (4)$$

wobei

$$\bar{x} = \varphi\left(\frac{\sum_1^h k_i f(x_i)}{\sum_1^h k_i}\right), \quad h < n,$$

was sofort evident ist.

II. Nach der von JENSEN¹⁾ gegebenen Definition nennt man eine Funktion $f(x)$ in einem Intervall konvex, wenn im ganzen Intervall für $x_i \neq x_k$ die Ungleichung

$$\frac{f(x_i) + f(x_k)}{2} \geq f\left(\frac{x_i + x_k}{2}\right)$$

erfüllt ist. Gilt die Ungleichung in umgekehrtem Sinne, so ist $f(x)$ konkav. Kommt das Gleichheitszeichen nicht in Frage, so ist die Funktion streng konvex bzw. streng konkav.

Hat eine Funktion $f(x)$ außer den eingangs für die Mittelbildung geforderten Eigenschaften noch die Besonderheit, konvex oder konkav zu sein, so können wir vier Fälle unterscheiden:

konvex steigend, konvex fallend, konkav steigend, konkav fallend.

JENSEN hat folgende Ungleichung bewiesen: Sind x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) reelle Größen, k_i ($i = 1, 2, \dots, n$) beliebige positive Konstanten, $f(x)$ eine Funktion mit den geforderten Eigenschaften, φ deren Umkehrfunktion, dann ist

$$f\left(\frac{\sum k_i x_i}{\sum k_i}\right) \leq \frac{\sum k_i f(x_i)}{\sum k_i},$$

wenn $f(x)$ konvex, bzw.

$$f\left(\frac{\sum k_i x_i}{\sum k_i}\right) \geq \frac{\sum k_i f(x_i)}{\sum k_i},$$

wenn $f(x)$ konkav, woraus folgt

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sum k_i x_i}{\sum k_i} &\leq \varphi\left(\frac{\sum k_i f(x_i)}{\sum k_i}\right), && \text{wenn } f(x) \text{ konvex steigend oder} \\ & && \text{konkav fallend} \\ \frac{\sum k_i x_i}{\sum k_i} &\geq \varphi\left(\frac{\sum k_i f(x_i)}{\sum k_i}\right), && \text{wenn } f(x) \text{ konkav steigend oder} \\ & && \text{konvex fallend} \end{aligned} \right\}. \quad (5)$$

Diese Jensensche Ungleichung gibt die Möglichkeit, zu entscheiden, ob die quasiarithmetische Mittelbildung nach einer konvexen oder konkaven Funktion größere

¹⁾ V. JENSEN, *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes*, Acta mathematica 30 (1905).

oder kleinere Werte als das arithmetische Mittel liefert, wofür wir im folgenden einige Beispiele anführen werden.

III. Vorerst geben wir eine einfache und anschauliche Herleitung des Satzes von JENSEN (5), wobei wir uns auf den Fall steigender Konvexität beschränken; die übrigen drei Fälle lassen sich einfach in sinngemäßer Abwandlung erledigen. Der Beweisgang stützt sich auf folgenden Hilfssatz:

Ist $f(x)$ eine steigende konvexe Funktion, $g(\xi) = a\xi + b$ eine Gerade, und ist weiter für $\xi_1 \leq x_1$ und $\xi_2 \leq x_2$

$$g(\xi_1) = f(x_1) \quad \text{und} \quad g(\xi_2) = f(x_2),$$

so ist für
$$g(\mu) = \frac{k_1 g(\xi_1) + k_2 g(\xi_2)}{k_1 + k_2} = f(m) = \frac{k_1 f(x_1) + k_2 f(x_2)}{k_1 + k_2},$$

$$\mu = \gamma[g(\mu)] \leq m = \varphi[f(m)], \quad (6)$$

wobei γ die Umkehrfunktion von $g(\xi)$, φ jene von $f(x)$ bedeutet (Fig. 1).

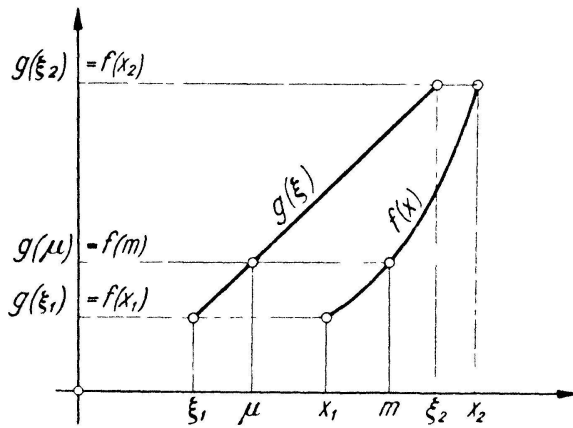


Fig. 1

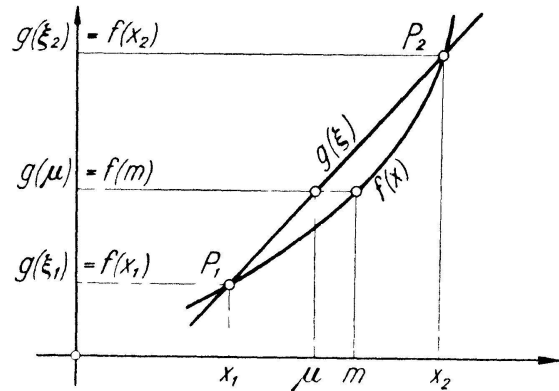


Fig. 2

Seien nun zwei reelle Größen $x_1 < x_2$ gegeben und eine steigende konvexe Funktion $f(x)$ sowie deren Umkehrfunktion φ . Weiter sei $g(\xi) = a\xi + b$ die Gerade durch die Punkte P_1 und P_2 mit den Koordinaten $[x_1, f(x_1)]$ und $[x_2, f(x_2)]$, und γ sei die Umkehrfunktion von $g(\xi)$ (Fig. 2).

Es ist also $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = x_2$ und $g(\xi_1) = f(x_1)$, $g(\xi_2) = f(x_2)$. Bezeichnen wir mit k_1, k_2 zwei positive Konstanten, so ist gemäß (6)

$$g(\mu) = \frac{k_1 g(\xi_1) + k_2 g(\xi_2)}{k_1 + k_2} = f(m) = \frac{k_1 f(x_1) + k_2 f(x_2)}{k_1 + k_2},$$

also
$$\mu = \gamma[g(\mu)] \leq m = \varphi[f(m)].$$

Nachdem aber $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = x_2$, ist offenbar, in Anwendung von Ib,

$$\mu = \gamma[g(\mu)] = \frac{k_1(a x_1 + b) + k_2(a x_2 + b) - (k_1 + k_2)b}{(k_1 + k_2)a} = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2}{k_1 + k_2}.$$

Das heißt es ist μ das mit den gleichen Gewichten wie das quasiarithmetische Mittel m gebildete arithmetische Mittel, womit (5) für $n = 2$ bewiesen ist.

Seien nun drei reelle Größen $x_1 < x_2 < x_3$ gegeben und eine steigende konvexe Funktion $f(x)$ mit der Umkehrfunktion φ ; k_i seien die zu x_i gehörigen positiven Gewichte ($i = 1, 2, 3$).

Nun bilden wir vorerst für x_1 und x_2 die beiden Teilmittelwerte μ und m in der soeben beschriebenen Weise. Es ist also $\mu \leq m$, und $g(\mu) = f(m)$. — Wir bezeichnen sodann die Gerade durch die Punkte P' und P_3 mit den Koordinaten $[\mu, f(m)]$ und $[x_3, f(x_3)]$ mit $\bar{g}(\xi) = \bar{a}\xi + \bar{b}$. Wenden wir nun Hilfssatz (6) in bezug auf die Abszissen $\mu \leq m$, $\xi_3 = x_3$ und die zugehörigen Funktionswerte $\bar{g}(\mu) = f(m)$ und $\bar{g}(\xi_3) = f(x_3)$ an, so folgt:

$$\bar{g}(\bar{\mu}) = \frac{(k_1 + k_2) \bar{g}(\mu) + k_3 \bar{g}(\xi_3)}{k_1 + k_2 + k_3} = f(\bar{m}) = \frac{(k_1 + k_2) f(m) + k_3 f(x_3)}{k_1 + k_2 + k_3},$$

also
$$\bar{\mu} = \bar{\gamma}[\bar{g}(\bar{\mu})] \leq m = \varphi[f(\bar{m})].$$

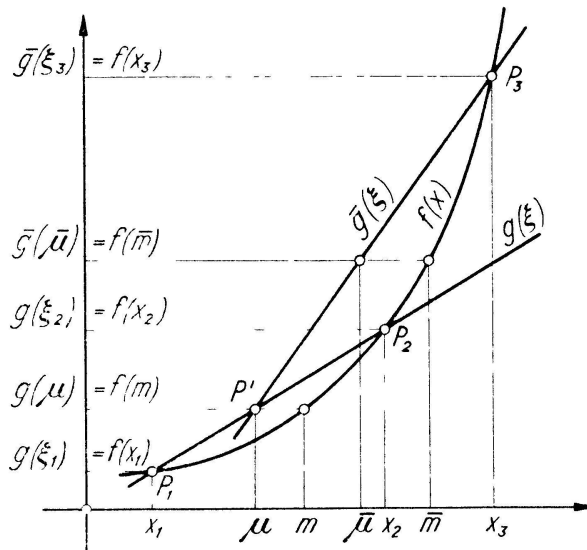


Fig. 3

Nun ist einerseits nach Ib:

$$\mu = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2}{k_1 + k_2} = \gamma \left(\frac{k_1 g(x_1) + k_2 g(x_2)}{k_1 + k_2} \right) = \bar{\gamma} \left(\frac{k_1 \bar{g}(x_1) + k_2 \bar{g}(x_2)}{k_1 + k_2} \right)$$

und andererseits nach Ic:

$$\bar{\mu} = \bar{\gamma} \left(\frac{(k_1 + k_2) \bar{g}(\mu) + k_3 \bar{g}(\xi_3)}{k_1 + k_2 + k_3} \right) = \bar{\gamma} \left(\frac{k_1 \bar{g}(x_1) + k_2 \bar{g}(x_2) + k_3 \bar{g}(x_3)}{k_1 + k_2 + k_3} \right),$$

$$\bar{m} = \varphi \left(\frac{(k_1 + k_2) f(m) + k_3 f(x_3)}{k_1 + k_2 + k_3} \right) = \varphi \left(\frac{k_1 f(x_1) + k_2 f(x_2) + k_3 f(x_3)}{k_1 + k_2 + k_3} \right).$$

Sodann gilt, wiederum nach Ib:

$$\bar{\mu} = \gamma \left(\frac{k_1 \bar{g}(x_1) + k_2 \bar{g}(x_2) + k_3 \bar{g}(x_3)}{k_1 + k_2 + k_3} \right) = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3}{k_1 + k_2 + k_3},$$

so daß wir haben:

$$\bar{\mu} = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3}{k_1 + k_2 + k_3} \leq \bar{m} = \varphi \left(\frac{k_1 f(x_1) + k_2 f(x_2) + k_3 f(x_3)}{k_1 + k_2 + k_3} \right).$$

Damit ist (5) für $n = 3$ bewiesen. Der Beweisgang ist evidenterweise, immer unter Verwendung der gleichen Hilfssätze, fortsetzbar, so daß (5) bei den gemachten Voraussetzungen über $f(x)$ für beliebiges n gilt. (Schluß folgt.) H. JECKLIN, Zürich.