Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **4 (1949)**

Heft 5

PDF erstellt am: **15.09.2024**

Kleine Mitteilungen

Ein Näherungsverfahren zur Lösung algebraischer Gleichungen 4. Grades

Die vier Wurzeln einer vorgelegten algebraischen Gleichung 4. Grades

$$x^4 + a x^3 + b x^2 + c x + d = 0$$

denkt man sich zu zwei Paaren zusammengefaßt, für deren jedes die Wurzelprodukte und -summen mit P und S bzw. p und s bezeichnet werden mögen. Beim Vorhandensein zweier konjugiert komplexer Wurzeln versteht sich ihre Zusammenfassung von selbst, und reelle Wurzeln werden in beliebiger Weise zu zweit als Paar behandelt.

Nun bestehen bekanntlich zwischen den Vorzahlen a bis d und diesen Wurzelprodukten und -summen die Beziehungen

$$a = -S - s, \qquad b = P + S s + p,$$
$$c = -P s - p S, \qquad d = P p,$$

aus denen sich folgender Lösungsweg für die 4 neuen reellen Unbekannten P, S, p und s gut ablesen läßt:

Es sei z. B. ein ungefährer Wert von P (oder p) bekannt; damit ergibt sich zunächst aus der 4. Gleichung p (bzw. P) und dann aus der 1. und 3. Gleichung zusammen, wie leicht zu übersehen, s und S. Wäre nun das anfangs benutzte P (oder p) richtig gewesen, so würde jetzt beim Einsetzen aller dieser der Reihe nach gefundenen Werte in die rechte Seite der 2. Gleichung gerade b herauskommen; da es jedoch nur eine Näherung war, wird die Probe $P + S s + p - b$ verschieden von Null ausfallen. Das Ergebnis der Probe ist also in sehr einfacher Weise von P (oder p) abhängig, und dieses läßt sich nun leicht nach der *regula falsi* (eingabeln) mit beliebiger Genauigkeit so bestimmen, daß bei der Probe Null herauskommt: dann hat man den richtigen Wert von P (oder p) gefunden. Der Rechnungsgang sieht also — ausgehend von einem Näherungswert für P — wie folgt aus:

$$P, \qquad p = \frac{d}{P}, \qquad s = \frac{a p - c}{P - p}, \qquad S = -a - s, \qquad P + S s + p - b.$$

Jede weitere Zeile wird dazu benutzt, einen immer besseren Wert von P zu gewinnen, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist. Setzt man dann zum Schluß den richtigen Wert für P ein, so erhält man nach diesem Verfahren nicht nur die übrigen Werte p, s und S, sondern hat auch noch gleichzeitig für alle eine gemeinsame Probe. Wird mit p statt P begonnen, so verläuft die Rechnung nach der Bestimmung von $P = d/p$ genau so. Sind P und p ungefähr gleich, so genügt eine genauere Bestimmung des zweiten Wertes jeder Zeile, um bei der Differenzbildung $P - p$ noch genügend viele Stellen für die Ausrechnung von s übrig zu behalten.

Bei $P = p$ versagt zwar dieser Weg, doch läßt sich das Näherungsverfahren auch dann verwenden, wenn man nur in etwas abgeänderter Weise mit S (oder s) statt mit P (oder p) beginnt. Mit Hilfe der anfangs verwendeten vier Beziehungen ist dann folgender zweiter Lösungsweg ebenso leicht zu übersehen:

Nach der Wahl von S (oder s) ergibt sich aus der ersten Gleichung sofort das s (bzw. S) und dann aus der zweiten und dritten zusammen das p und P; die Probe $P p - d$, die gerade Null ergeben soll, dient nunmehr genau so wie beim zuerst beschriebenen Weg zur Verbesserung des Ausgangswertes S (oder s). Die einzelnen Zeilen des Rechnungsganges lauten dann, wenn z. B. mit S begonnen wird:

$$S, \qquad s = -a - S, \qquad p = \frac{c + s(b - S s)}{s - S}, \qquad P = b - S s - p, \qquad P p - d.$$

Auch dieser «S-Weg» hat eine schwache Stelle, nämlich bei $S = s$. Doch dann wird er durch den «P-Weg» trefflich ergänzt – abgesehen von der praktisch höchst unwahrscheinlichen Möglichkeit, daß gleichzeitig $P = p$ und $S = s$ ist. Nun, in solch einem Fall tut sich dies durch bestimmte Beziehungen zwischen den Vorzahlen a bsi d kund, und die Lösung ist dann auf andere Weise immer möglich.

Mit den Werten P, S, p und s ist die Aufgabe praktisch gelöst, denn die vier gesuchten Wurzeln lassen sich nun leicht aus den beiden quadratischen Gleichungen

$$x^2 - S\,x + P = 0 \qquad \text{und} \qquad x^2 - s\,x + p = 0$$

bestimmen. Erst jetzt ergibt sich also der Charakter der Wurzeln, ob reell oder komplex, welche Kenntnis zur Durchführung dieses Näherungsverfahrens somit gar nicht erforderlich ist.

An einem Beispiel sei der Verlauf der Rechnung gezeigt; die fraglichen Wurzelprodukte und -summen mögen etwa auf Tausendstel genau zu bestimmen sein.

$$x^4 + 3\,x^3 + 7\,x^2 + 7\,x + 7 = 0.$$

Mit P beginnend ($d > 0 \ldots P > +\sqrt{d}$):

P	$p = \dfrac{7}{P}$	$s = \dfrac{3\,p - 7}{P - p}$	$S = -3 - s$	$P + S\,s + p - 7$
3	2,33	0	– 3	– 1,67
4	1,75	– 0,78	– 2,22	+ 0,48
3,7	1,892	– 0,732	– 2,268	+ 0,252
3,5	2,000	– 0,667	– 2,333	+ 0,056
3,44	2,035	– 0,637	– 2,363	– 0,020
3,455	2,026	– 0,645	– 2,355	0

Die Ausrechnung der beiden quadratischen Gleichungen $x^2 + 2{,}355\,x + 3{,}455 = 0$ und $x^2 + 0{,}645\,x + 2{,}026 = 0$ liefert nun als Lösung die beiden konjugiert komplexen Wurzelpaare

$$x_{1,2} = -1{,}177_5 \pm 1{,}438_2\,i$$

und

$$x_{3,4} = -0{,}322_5 \pm 1{,}386_4\,i.$$

Erich Sponder, Paris.

Aufgaben

Aufgabe 40. Eine Parabel ist durch eine Sehne AB und deren Pol T eindeutig bestimmt. Wie konstruiert man ihren Scheitelpunkt, wenn außer T und der Mitte von AB nur 5 gerade Linien (Parallele, Normale und Verbindungsgerade) gezogen werden sollen? Weiß jemand eine noch einfachere Konstruktion? A. Stoll.

Lösung des Aufgabenstellers: Die Aufgabe ist ein Spezialfall der folgenden Aufgabe: Von einer durch eine Sehne AB und deren Pol T gegebenen Parabel denjenigen Punkt Z zu konstruieren, dessen Tangente eine beliebig vorgeschriebene Richtung hat.

M sei die Mitte von AB. Man ziehe a durch A und b durch B parallel zu TM. Alle drei sind Durchmesser der Parabel. Die Parallele durch T zur vorgeschriebenen Tangentenrichtung schneide a in U und b in V, und die Tangente in Z schneide a in X und b in Y. Da nun XZ von AT halbiert wird, muß Z auf AV liegen; und da ebenso ZY von BT halbiert wird, muß Z auch auf BU liegen. Die erlaubten fünf Konstruktionslinien sind also: a, b, UV, AV und BU.

Soll Z der Scheitelpunkt sein, dann ist die Tangente zu TM normal.