

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Band:** 4 (1949)  
**Heft:** 6

**Artikel:** Das Imaginäre in der Geometrie  
**Autor:** Locher-Ernst, L.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-14328>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 16.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts  
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer*

---

El. Math.      Band IV      Nr. 6      Seiten 121–144      Basel, 15. November 1949

---

## Das Imaginäre in der Geometrie<sup>1)</sup>

### 7. Imaginäre Ebenen

Ein imaginärer Punkt des Raumes wird durch eine gerichtete elliptische Punktinvolution gegeben, die wir durch einen Pfeil darstellten<sup>2)</sup>. Eine *spezielle imaginäre Gerade* hat als Bild eine gerichtete elliptische Strahleninvolution. Das Dualitätsgesetz im Raume gibt an, wie wir eine *imaginäre Ebene* zu erklären haben. Das zur Punktreihe duale Gebilde ist das Ebenenbüschel. Verbindet man den Träger  $\rho$  des Büschels mit den Punkten einer Punktreihe, deren Träger windschief zu  $\rho$  ist, so überträgt sich eine Involution in der Punktreihe auf das Ebenenbüschel. *Das Bild einer imaginären Ebene  $\pi$  ist eine gerichtete elliptische Ebeneninvolution.*

Ein Punkt  $P$  liegt in der imaginären Ebene  $\pi$ , wenn entweder  $P$  (also auch sein Pfeil) dem reellen Träger  $\rho$  von  $\pi$  angehört oder wenn die  $\pi$  darstellende Ebeneninvolution einschließlich ihres Sinnes perspektiv ist zur gerichteten Involution, die  $P$  darstellt (Fig. 1).

Auf einer imaginären Ebene liegt genau eine reelle Gerade, nämlich der Träger  $\rho$  der die Ebene liefernden Involution.

Eine *spezielle imaginäre Gerade*  $g$  liegt in der imaginären Ebene  $\pi$ , sofern die  $g$  darstellende Involution einschließlich ihres Sinnes perspektiv ist zur Involution, die  $\pi$  darstellt (Fig. 2).

Wir wollen uns einen Überblick über die sämtlichen  $\infty^4$  Punkte einer imaginären Ebene  $\pi$  verschaffen. Außer den reellen und imaginären Punkten des Trägers  $\rho$  von  $\pi$  handelt es sich um diejenigen imaginären Punkte, deren Involutionen einschließlich ihres Sinnes perspektiv sind zur Involution, die  $\pi$  darstellt. Auf jeder reellen, von  $\rho$  verschiedenen Geraden liegt genau ein Punkt von  $\pi$ . Um sich die Menge der entsprechenden Pfeile zu vergegenwärtigen, genügt es, dies für eine Ebene  $\pi$  zu tun, die durch eine gerichtete *Rechtwinkel-Ebeneninvolution*  $\alpha\beta\alpha_1\beta_1$  gegeben ist, da der allgemeine Fall hieraus durch eine affine Umformung gewonnen werden kann.

Der Punkt  $M$  in  $\alpha$  sei der Mittelpunkt eines Strahlenbüschels ( $M$ ), dessen Ebene zu  $\alpha_1$  parallel (Fig. 3), also zu  $\alpha$  normal ist. Die von der gerichteten Rechtwinkel-Ebeneninvolution aus den Strahlen des Büschels ( $M$ ) ausgeschnittenen gerichteten Punktinvolutionen haben alle  $M$  zum Mittelpunkt. Die Schnittpunkte mit der einen winkelhalbierenden Ebene  $\beta$  von  $\alpha$  und  $\alpha_1$  sind den entsprechenden Schnittpunkten

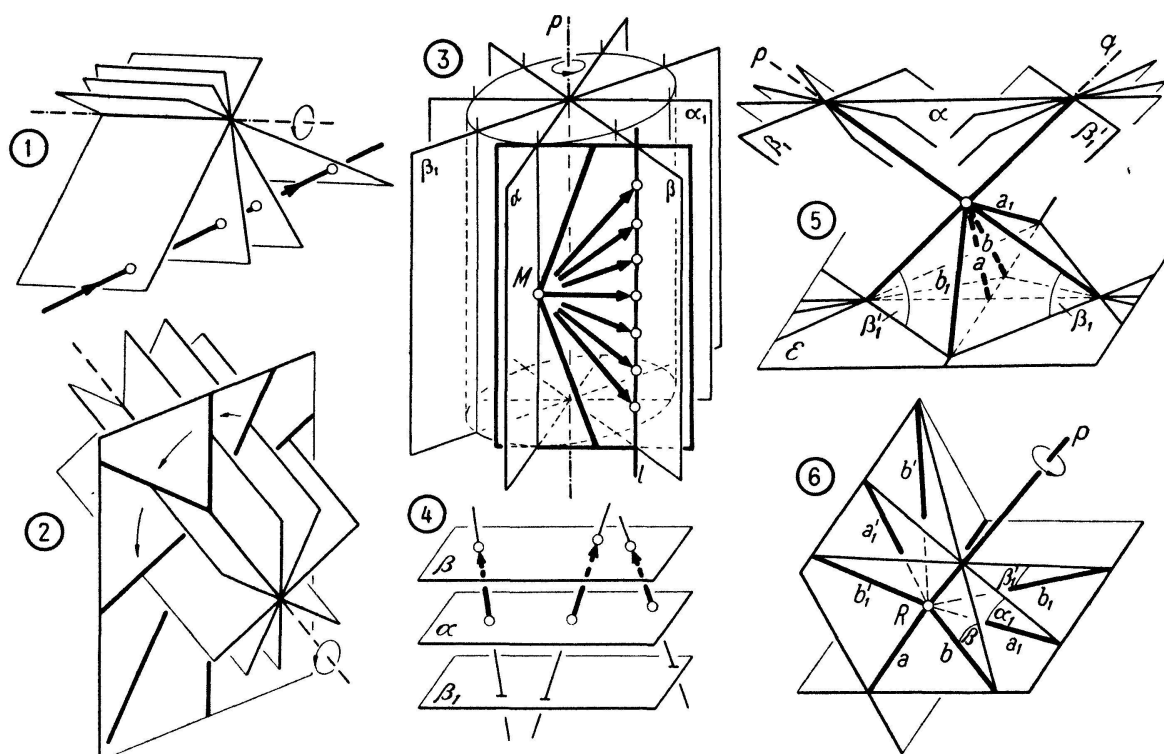
---

<sup>1)</sup> Erster Teil im Heft 5 (1949) dieser Zeitschrift.

<sup>2)</sup> Es sei hier an die Bemerkung am Schlusse des dritten Abschnittes (S. 100) erinnert.

mit der anderen winkelhalbierenden Ebene  $\beta_1$  zugeordnet. Auszunehmen ist nur die zu  $p$  parallele Gerade des Büschels ( $M$ ), die  $\pi$  im unendlichfernen reellen Punkt von  $p$  trifft. Die Schnittgerade  $l$  der Ebene  $\beta$  mit der Ebene des Büschels ( $M$ ) enthält somit die Endpunkte der Pfeile, welche die Schnittpunkte des Büschels ( $M$ ) mit  $\pi$  darstellen, während  $M$  ihr gemeinsamer Anfangspunkt ist.

Die sämtlichen nicht in  $p$  liegenden Pfeile von  $\pi$  (d. h. Pfeile, die Punkte der Ebene  $\pi$  darstellen) ergeben sich, indem man das in Fig. 3 angedeutete Halbbüschel von Pfeilen parallel  $p$  verschiebt, um  $p$  dreht und von  $p$  aus dehnt. Die Normalprojektion auf eine zu  $p$  normale Ebene liefert also einen rotatorischen Wirbel, der die Schnittgerade von  $\pi$  mit der Projektionsebene darstellt.



Figuren 1-6

Im allgemeinen Falle erhält man an Stelle der coaxialen Drehzylinder der Fig. 3 koaxiale, ähnliche und ähnlich gelegene elliptische Zylinder.

Es ist noch ein Spezialfall zu beachten: Liegt der Träger  $p$  der Ebeneninvolution unendlichfern, so erfüllen die Anfangs- und die Endpunkte der Pfeile von  $\pi$  je eine Ebene (Fig. 4,  $\alpha_1$  ist hier die unendlichferne Ebene).

Es stellen sich jetzt die Aufgaben, zwei beliebige Ebenen zu schneiden und zwei beliebige Punkte des Raumes zu verbinden. Wir nehmen zuerst den besonderen Fall an, daß sich die reellen Träger der beiden Ebenen oder der beiden Punkte schneiden.

Zwei Punkte  $P, Q$ , deren Pfeilgeraden sich schneiden, liegen in der Verbindungsebene dieser Geraden. In Abschnitt 5 (S. 103) wurde gezeigt, daß solche zwei Punkte eine und nur eine leicht zu konstruierende Verbindungsgerade bestimmen.

Hierzu dual: Zwei Ebenen  $\pi, \kappa$ , deren Träger  $p, q$  sich schneiden, bestimmen eine und nur eine Gerade, die in beiden Ebenen liegt.

Sind  $\pi$ ,  $\varkappa$  beide reell, so ist nichts zu beweisen. Ist  $\pi$  reell,  $\varkappa$  imaginär, so stellt die durch die Ebeneninvolution von  $\varkappa$  aus  $\pi$  geschnittene gerichtete elliptische Strahleninvolution die Schnittgerade dar, die also eine spezielle imaginäre Gerade ist. Nur für den besonderen Fall, daß der Träger  $q$  von  $\varkappa$  in  $\pi$  liegt, ist die gemeinsame Gerade, nämlich  $q$  selbst, reell.

Sind  $\pi$ ,  $\varkappa$  beide imaginär und ist  $\alpha$  die Verbindungsebene ihrer Träger  $p$ ,  $q$ , so stellen wir die beiden Ebeneninvolutionen von  $\alpha$  aus harmonisch dar:  $\pi(\alpha\beta\alpha_1\beta_1)$ ,  $\varkappa(\alpha\beta'\alpha_1'\beta_1')$ . In Fig. 5 ist zur leichteren Übersicht noch der Schnitt der beiden Ebenen mit einer reellen Ebene eingezeichnet. Die Schnittgeraden  $a_1 = \alpha_1\alpha_1'$ ,  $b = \beta\beta'$ ,  $b_1 = \beta_1\beta_1'$  liegen dann in einer Ebene  $\delta$ . Die vier Geraden  $a = \alpha\delta$ ,  $a_1$ ,  $b$ ,  $b_1$  bestimmen eine zu beiden Ebeneninvolutionen perspektive gerichtete Strahleninvolution  $ab a_1 b_1$ , welche die gesuchte Schnittgerade  $g$  der Ebenen  $\pi$ ,  $\varkappa$  darstellt. Der reelle Punkt von  $g$  ist der Schnittpunkt  $pq$ .

Zwei spezielle imaginäre Geraden  $g$ ,  $g'$ , die denselben reellen Punkt  $R$  besitzen, bestimmen eindeutig eine Ebene, die beide Geraden enthält.

*Beweis:* Liegen die Strahleninvolutionen in derselben reellen Ebene, so ist diese die einzige Ebene, welche beide Geraden enthält. Im allgemeinen Falle bringe man die beiden Ebenen (Fig. 6), welche die Strahleninvolutionen von  $g$  und  $g'$  tragen, zum Schnitt;  $a$  sei der gemeinsame Strahl der beiden Büschel. Nun bestimme man die von  $a$  ausgehenden harmonischen Darstellungen  $g(ab a_1 b_1)$ ,  $g'(ab' a_1' b_1')$ . Die Verbindungsebenen  $\beta = b b'$ ,  $\alpha_1 = a_1 a_1'$ ,  $\beta_1 = b_1 b_1'$  gehen dann durch eine Gerade  $p$ . Diese Ebenen bestimmen mit der Ebene  $\alpha = ap$  die gerichtete elliptische Ebeneninvolution  $\alpha\beta\alpha_1\beta_1$ , die zu den  $g$  und  $g'$  darstellenden Strahleninvolutionen perspektiv ist, also die gesuchte Verbindungsebene von  $g$  und  $g'$  darstellt.

### 8. Allgemeine imaginäre Geraden

Jetzt wollen wir zeigen, daß auch zwei beliebige imaginäre Punkte  $P$ ,  $Q$  des Raumes sowie auch zwei beliebige imaginäre Ebenen  $\pi$ ,  $\varkappa$  eindeutig ein Gebilde  $g$  bestimmen, das wir eine *allgemeine imaginäre Gerade* nennen. Diese Bezeichnung ist gerechtfertigt, wenn die folgenden Eigenschaften vorhanden sind:

1. Durch zwei beliebige Punkte, die dem Gebilde  $g$  angehören, ist  $g$  eindeutig bestimmt.

2. Die Punkte des Gebildes  $g$  sind genau die gemeinsamen Punkte von zwei beliebigen Ebenen, die durch  $P$  und  $Q$  gehen.

Und dual hierzu:

1. Durch zwei beliebige Ebenen, die beide das Gebilde  $g$  enthalten, ist  $g$  eindeutig bestimmt.

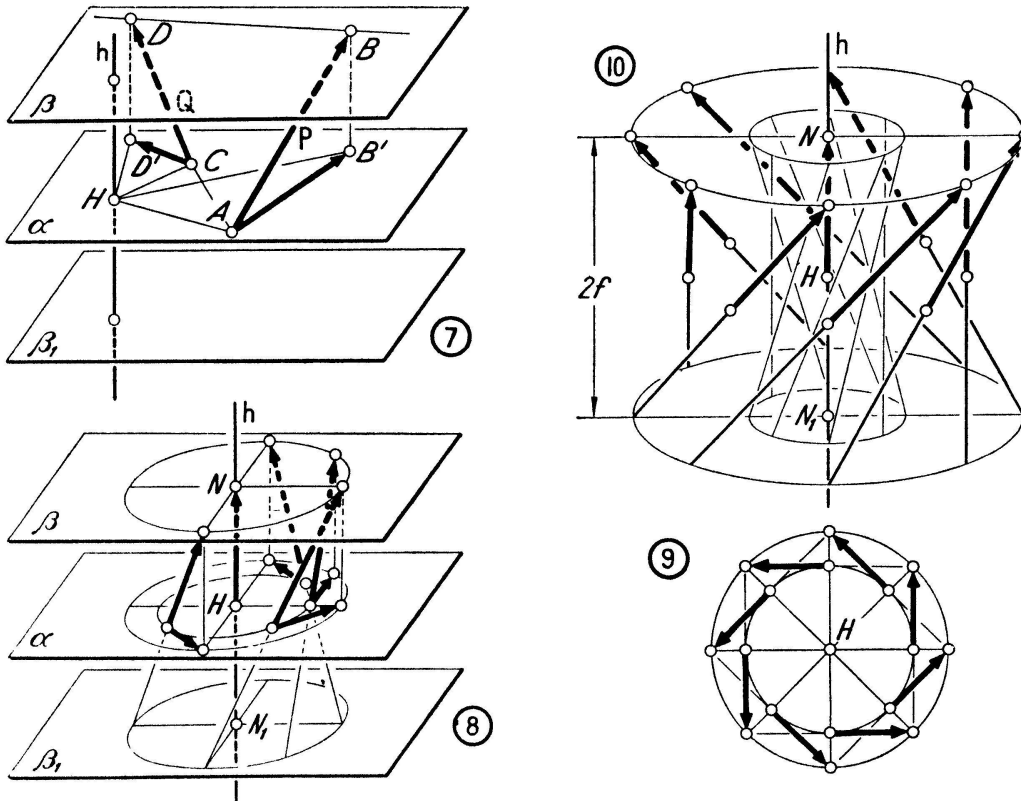
2. Die Ebenen, die das Gebilde  $g$  enthalten, sind genau die Ebenen durch zwei beliebige Punkte, die in  $\pi$  und  $\varkappa$  liegen.

Wir werden sehen, daß ein solches Gebilde tatsächlich existiert. Wir gehen hierbei von zwei Punkten  $P$ ,  $Q$  aus, deren Pfeile  $AB$  und  $CD$  zueinander windschief sind. Es ist klar, daß es weder eine reelle noch eine spezielle imaginäre Gerade gibt, welche beide Punkte enthält.

Zunächst beweisen wir, daß *durch jeden reellen Punkt  $R$  des Raumes genau eine Ebene geht, die  $P$  und  $Q$  enthält*. Beweis: Liegt  $R$  auf einer der Pfeilgeraden, zum Bei-

spiel auf der Geraden  $p$  des Pfeiles  $P$ , so stellt die gerichtete elliptische Ebeneninvolution  $p(CD)$  die gesuchte Ebene dar. Hat aber  $R$  allgemeine Lage, so bestimmen die beiden gerichteten elliptischen Strahleninvolutionen  $R(AB)$ ,  $R(CD)$  zwei spezielle imaginäre Geraden mit dem gemeinsamen reellen Punkt  $R$ . Nach dem am Schlusse des 7. Abschnittes bewiesenen Satze ist durch diese Geraden eindeutig eine Verbindungsebene festgelegt. Diese enthält die Punkte  $P$  und  $Q$ .

Es sei jetzt vorausgeschickt, wie wir weiter vorgehen. Wir werden durch  $P$  und  $Q$  zwei besonders gewählte Ebenen  $\delta$  und  $\varepsilon$  legen. Dann untersuchen wir das Gebilde,



Figuren 7–10

das aus den gemeinsamen Punkten dieser beiden Ebenen besteht. Schließlich zeigen wir, daß dieses Gebilde die beiden oben geforderten Eigenschaften 1 und 2 besitzt. Damit werden wir ein vollkommen deutliches Bild für die allgemeine imaginäre Gerade gewonnen haben.

Die Gerade  $AC$  durch die Anfangspunkte der beiden Pfeile  $P$  und  $Q$ , und die zu ihr windschiefe Gerade  $BD$  durch deren Endpunkte bestimmen eindeutig zwei parallele Ebenen  $\alpha$  und  $\beta$ , wobei  $\alpha$  durch  $AC$  und  $\beta$  durch  $BD$  geht (Fig. 7). Es sei  $u$  die unendlichferne Schnittgerade dieser Ebenen  $\alpha$ ,  $\beta$ . Im Büschel ( $u$ ) wird durch die Involutionen, welche  $P$  und  $Q$  darstellen, dieselbe gerichtete elliptische Involution  $\alpha\beta\alpha_1\beta_1$  festgelegt. Hierbei entspricht der Ebene  $\alpha$  die unendlichferne Ebene  $\alpha_1$  des Raumes, der Ebene  $\beta$  diejenige Ebene  $\beta_1$ , welche von  $\alpha$  denselben Abstand hat wie  $\beta$ . Die durch die Involution  $\alpha\beta\alpha_1\beta_1$  bestimmte imaginäre Ebene  $\delta$  ist die eine der beiden angekündigten ausgezeichneten Ebenen durch  $P$  und  $Q$ .

Zur Bestimmung der zweiten ausgezeichneten Ebene  $\varepsilon$  durch  $P$  und  $Q$  projizieren wir die Pfeile  $P$ ,  $Q$  normal auf die Ebene  $\alpha$ . Die Projektionen  $P'$ ,  $Q'$  sind zwei Pfeile

$AB'$  und  $CD'$ , also zwei imaginäre Punkte in  $\alpha$ , die einen ebenen Wirbel, eine spezielle imaginäre Gerade  $g'$  in  $\alpha$  festlegen.  $H$  sei der reelle Punkt von  $g'$ , also der Mittelpunkt des ebenen Wirbels. Die zu  $\alpha$  senkrechte Gerade  $h$  bestimmt dann mit der  $g'$  darstellenden gerichteten elliptischen Strahleninvolution eine gerichtete elliptische Ebeneninvolution, also eine Ebene  $\varepsilon$ , die gemäß der Konstruktion durch  $P$  und  $Q$  geht.

Jetzt sind die Punkte, die den beiden Ebenen  $\delta$  und  $\varepsilon$  gemeinsam sind, leicht zu überschauen. Die Gesamtheit dieser Punkte sei mit  $(W)$  bezeichnet. Wir haben die Pfeile zu bestimmen, welche zwei Pfeilmannigfaltigkeiten von der in den Figuren 3 und 4 angedeuteten Art gemeinsam sind.

Alle Pfeile von  $\delta$  beginnen in  $\alpha$  und enden in  $\beta$ . Von diesen Pfeilen haben wir diejenigen auszuwählen, die auch zu  $\varepsilon$  gehören. Jeder eigentliche Punkt von  $\alpha$  ist der Anfangspunkt von genau einem solchen Pfeil, dessen Normalprojektion auf  $\alpha$  der Geraden  $g'$  angehört. Das Gebilde  $(W)$  ergibt sich somit folgendermaßen: *Die Anfangspunkte aller Pfeile des ebenen Wirbels von  $g'$  lassen wir unverändert, die Endpunkte hingegen heben wir senkrecht zu  $\alpha$  um die feste Länge  $f$ , nämlich um den Abstand der Ebenen  $\alpha, \beta$ .*

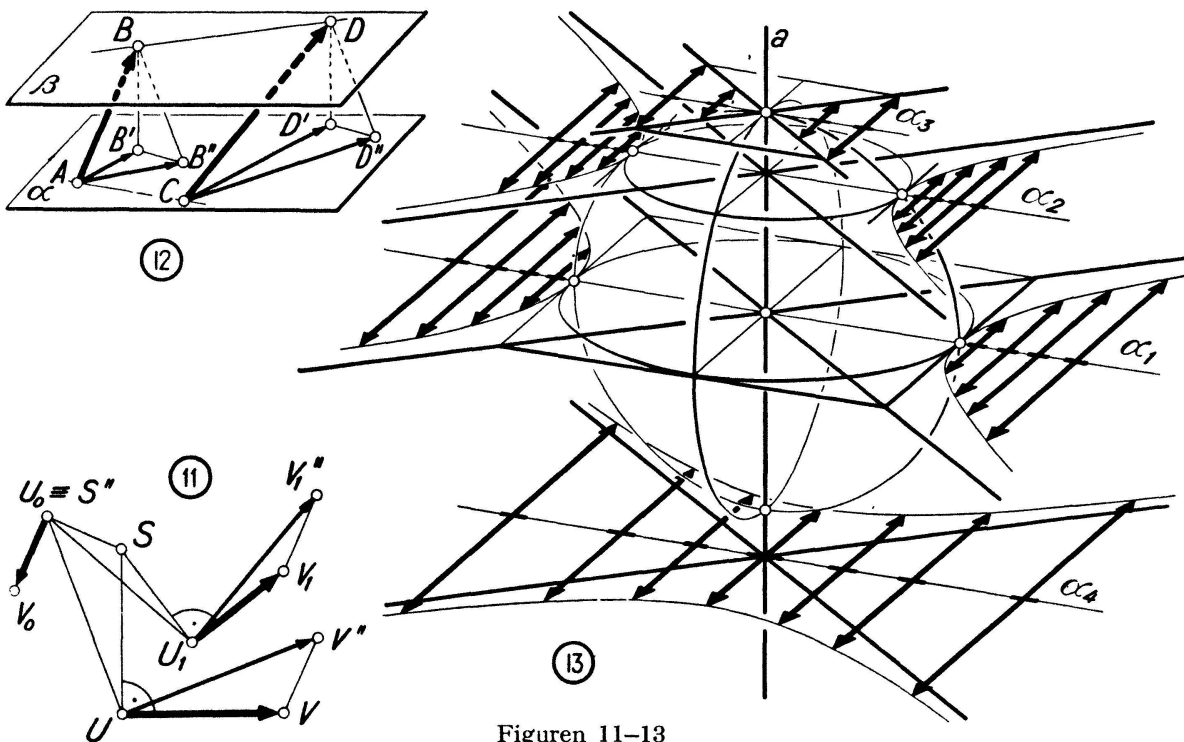
In der Fig. 8 denke man sich zunächst, daß  $g'$ , die Normalprojektion des Gebildes  $(W)$  auf  $\alpha$ , einen rotatorischen Wirbel liefert (Fig. 9). Der allgemeine Fall ergibt sich hieraus durch eine orthogonale affine Umformung.

Nehmen wir zu jedem Pfeil von  $(W)$  noch denjenigen hinzu, der den konjugiert komplexen Punkt liefert, so liegt dessen Endpunkt in der Ebene  $\beta_1$ . Die Geraden, welche Pfeile von  $(W)$  tragen, lassen sich somit folgendermaßen konstruieren: Man zeichnet in  $\beta$  und  $\beta_1$  zwei gleich große Kreise, deren Mitten  $N, N_1$  in der «Achse»  $h$  liegen, und verbindet übereinanderliegende Punkte dieser Kreise; die Verbindungsgeraden bilden die Mantellinien eines Drehzylinders. Nun muß der Kreis in  $\beta$  um  $N$  um den Winkel  $90^\circ$  gedreht werden. Aus dem Drehzylinder wird ein Rotationshyperboloid. Macht man dies für sämtliche Kreise in  $\beta$  um  $N$ , so ergeben sich unter Hinzunahme der unendlichfernen Geraden  $u$  die sämtlichen Geraden, welche Pfeile des Gebildes  $(W)$  tragen. Die Pfeile beginnen in  $\alpha$  und enden in  $\beta$ . Das Gebilde  $(W)$  nennen wir einen *räumlichen Wirbel* (Fig. 10). Im zunächst gedachten Falle haben wir einen *rotatorischen räumlichen Wirbel*. Der allgemeine räumliche Wirbel entsteht aus dem letzteren durch eine orthogonale Affinität. *Der durch zwei allgemein liegende imaginäre Raumpunkte  $P, Q$  eindeutig bestimmte räumliche Wirbel  $(W)$  stellt die durch  $P, Q$  gehende allgemeine imaginäre Gerade  $g$  dar.* Eine solche enthält keinen reellen Punkt und liegt in keiner reellen Ebene.

Man sieht sofort, daß  $(W)$  die Eigenschaft 1 besitzt. Zwei beliebige Pfeile von  $(W)$  bestimmen genau wie die Pfeile  $P, Q$  die Ebenen  $\alpha$  und  $\beta$ , und ihre Normalprojektionen auf  $\alpha$  legen nach Konstruktion dieselbe Gerade  $g'$  fest. Daß auch die zweite Eigenschaft vorhanden ist, werden wir noch zeigen. Vorerst überlegen wir, daß es  $\infty^8$  allgemeine imaginäre Geraden gibt: Die *Form* des Wirbels ist durch *eine* Größe, nämlich etwa durch die Exzentrizität der «Querschnittellipsen» (Fig. 10) bestimmt. Die «*Größe*» des Wirbels wird durch die Länge  $f$  des Hauptpfeiles  $HN$  festgelegt. Die *Lage* des Wirbels im Raume ist durch sechs Parameter bestimmt: Nämlich vier Parameter für die Lage der Achse  $h$ , ein Parameter für die Lage der zu  $h$  senkrechten Hauptebene  $\alpha$  und ein Parameter für die Richtung der Hauptachsen der Quer-

schnittellipsen. Strebt die Länge  $f$  gegen Null, so ergibt sich als Grenzgebilde eine spezielle imaginäre Gerade.

Richten wir die Aufmerksamkeit noch auf die Menge der Geraden, die Pfeile des Wirbels tragen. Aus der Konstruktion ergibt sich unmittelbar, daß durch jeden reellen Raumpunkt genau eine solche Gerade geht. Ferner enthält jede reelle Ebene des Raumes genau eine solche Gerade, was sich aus der Überlegung ergibt, daß jede reelle Ebene die Ebenen  $\delta$  und  $\varepsilon$  je in einer Geraden schneidet, deren Schnittpunkt einen Pfeil des Wirbels liefert, der in jener Ebene liegt. Die Menge der Pfeilgeraden ist also eine *lineare Strahlenkongruenz*. Auch die Gesamtheit der reellen Geraden, die



Figuren 11–13

zwei reelle windschiefe Geraden  $m, n$  treffen, hat die Eigenschaft, daß im allgemeinen durch jeden reellen Punkt genau eine Gerade dieser Gesamtheit geht und in jeder reellen Ebene genau eine solche Gerade liegt. Eine Ausnahme machen nur die Punkte und Ebenen der beiden *Brennlinien*  $m, n$ . Diese Gesamtheit heißt eine *hyperbolische Kongruenz*, die Gesamtheit der Pfeilgeraden eines räumlichen Wirbels eine *elliptische Kongruenz*. Während die erstere zwei reelle Brennlinien festlegt, wird durch die letztere ein Paar von konjugiert komplexen, allgemein imaginären Geraden  $g, g^*$  bestimmt. Ersetzen wir nämlich jeden Pfeil von  $(W)$  durch seinen konjugierten, d. h. durch denjenigen entgegengesetzter Richtung, gleicher Länge und mit gleichem Anfangspunkt, so ergibt sich offenbar wieder ein räumlicher Wirbel  $(W^*)$ . Durch die elliptische Kongruenz sind genau die beiden Wirbel  $(W)$  und  $(W^*)$  bestimmt. (Die beiden zum Mittelpunkt  $H$  symmetrischen und zur Achse  $h$  normalen Ebenen  $\beta, \beta_1$  enthalten diejenigen Punkte, die gegeneinander um  $90^\circ$  verdreht sind.)

Wir haben noch zu zeigen, daß jede Ebene  $\pi$ , welche die beiden Punkte  $P$  und  $Q$  enthält, auch alle weiteren Punkte des durch  $P, Q$  bestimmten Wirbels  $(W)$  enthält, daß also die Eigenschaft 2 vorhanden ist.

Zum Beweis brauchen wir den folgenden Hilfssatz: *Hält man die Anfangspunkte aller Pfeile eines ebenen Wirbels fest und verschiebt die Endpunkte in der Wirbelebene alle in derselben Richtung um dieselbe Länge, so entsteht wieder ein ebener Wirbel.* Beweis: Zunächst nehmen wir an, es handle sich um einen ebenen rotatorischen Wirbel.  $S$  sei sein Mittelpunkt und  $UV$  irgendeiner seiner Pfeile (Fig. 11). Der Endpunkt  $V$  gelange durch die Verschiebungsoperation nach  $V''$ .  $UV''$  ist also der aus  $UV$  hervorgehende Pfeil. Wir suchen jetzt den Pfeil  $U_0V_0$  des gegebenen Wirbels, der gleich lang wie der Verschiebungsvektor, aber entgegengesetzt gerichtet ist.  $SU_0$  ist senkrecht zu  $VV''$  und gleich lang wie  $VV''$  und  $U_0V_0$ . Durch die Verschiebungsoperation entsteht aus dem Pfeil  $U_0V_0$  der Punkt  $U_0 \equiv S''$ . Es ist  $U_0U$  senkrecht zu  $UV''$  und gleich lang wie  $UV''$ . Jetzt betrachten wir den rotatorischen Wirbel  $S''$  ( $UV''$ ), der durch  $S''$  als Mittelpunkt und die Richtung von  $UV''$  festgelegt wird. Ist  $U_1V_1$  ein beliebiger Pfeil des Wirbels  $S$  ( $UV$ ), so führt die Verschiebungsoperation diesen Pfeil in einen Pfeil  $U_1V_1''$  über, der dem Wirbel  $S''$  ( $UV''$ ) angehört, wie die Kongruenz der Dreiecke  $U_1V_1V_1''$ ,  $U_1SS''$  ergibt. Hiermit ist der Hilfssatz für einen ebenen rotatorischen Wirbel bewiesen. Im allgemeinen Falle führt man den gegebenen ebenen Wirbel (und das durch die Verschiebungsoperation entstandene Gebilde) durch eine Affinität in einen rotatorischen Wirbel über und beachtet, daß durch jede Affinität ein Wirbel wieder in einen Wirbel übergeht.

Nun betrachten wir eine beliebige durch  $P, Q$  gehende Ebene  $\pi$ .  $p$  sei deren reeller Träger. Die  $\pi$  bestimmende Ebeneninvolution ist dann perspektiv zu den Punktinvolutionen  $(AB)$  und  $(CD)$ . Wir projizieren die Endpunkte  $B, D, \dots$  aller Pfeile von  $(W)$  in Richtung der Geraden  $p$  auf die Ebene  $\alpha$  nach  $B'', D'', \dots$  (Fig. 12). Die Strecken  $B'B'', D'D'', \dots$  haben dann alle dieselbe Länge und Richtung. Der durch die Pfeile  $AB'', CD''$  eindeutig bestimmte ebene Wirbel ist nach dem Hilfssatz identisch mit dem eine gewisse Gerade  $g''$  darstellenden Wirbel, der durch die Verschiebungsoperation  $B' \rightarrow B'', D' \rightarrow D'', \dots$  aus dem durch  $AB', CD'$  bestimmten Wirbel für  $g'$  hervorgeht. Der Träger  $p$  der Ebeneninvolution, die  $\pi$  darstellt, schneidet somit  $\alpha$  im reellen Punkt von  $g''$ . Die Ebeneninvolution selbst schneidet  $\alpha$  in der  $g''$  bestimmenden Strahleninvolution. Das heißt aber:  $p$  gehört zur linearen Kongruenz von  $(W)$ , und die Ebeneninvolution von  $\pi$  ist perspektiv zu allen den Pfeilen von  $(W)$  entsprechenden Punktinvolutionen, abgesehen von der Punktinvolution, die auf  $p$  liegt.  $\pi$  enthält also tatsächlich alle Punkte des Wirbels  $(W)$ .

Auf gleiche Art erkennt man, daß umgekehrt jede Gerade  $q$  der Kongruenz Träger einer imaginären Ebene  $\varkappa$  ist, die alle Punkte von  $(W)$  enthält. Die Träger der Punkte einer allgemeinen imaginären Geraden sind also identisch mit den Trägern der Ebenen, die durch diese Gerade gehen. Die allgemeine imaginäre Gerade ist wie die reelle und die spezielle imaginäre Gerade ein in sich duales Gebilde.

Hiermit haben wir einen Hauptzweck unserer Ausführungen erreicht, nämlich auf möglichst elementarem Wege das sachgemäße Bild der allgemeinen imaginären Geraden zu gewinnen.

### 9. Schluß

Es kann sich nicht darum handeln, die synthetische Geometrie im Komplexen hier weiter aufzubauen. Wir wollen nur noch einige Bemerkungen anfügen. Es wäre leicht einzusehen, daß alle weiteren Sätze über das Verbinden und Schneiden der Elemente



Punkt, Gerade, Ebene allgemein gültig sind: Eine Ebene und eine ihr nicht angehörende Gerade haben genau einen gemeinsamen Punkt. Drei nicht in derselben Geraden liegende Punkte bestimmen genau eine sie enthaltende Ebene, usw.

Ferner lassen sich nun die imaginären Elemente, die z. B. in einer Fläche zweiten Grades enthalten sind, anschaulich darstellen. Auf den ovalen Flächen zweiten Grades liegen zwei Scharen von speziellen imaginären Geraden, hingegen keine reelle und keine allgemeine imaginäre Geraden. Das einschalige Hyperboloid trägt außer zwei Scharen von reellen Geraden auch allgemeine imaginäre Geraden. Fig. 13 zeigt die Verhältnisse bei der Kugel, deren sämtliche Punkte wir überschauen wollen. Eine Ebene  $\alpha_1$  durch den Mittelpunkt schneidet in einem Großkreis, dessen Pfeilfeld (vgl. hierzu S. 104) in der Figur angedeutet ist. Verschieben wir die Schnittebene in die Tangentialebene  $\alpha_3$ , so ergibt sich als Schnitt das Pfeilfeld von zwei konjugierten isotropen Geraden. In der Lage  $\alpha_4$  hat die Ebene nur noch die imaginären Punkte eines imaginären Kreises mit der Kugel gemeinsam. (Um die sämtlichen Punkte des jeweiligen Schnittgebildes zu erhalten, hat man Fig. 13 natürlich um die Achse  $a$  zu drehen.)

Es sei auch noch die Frage beantwortet, wie sich die übliche Darstellung der komplexen Zahlen in einem rechtwinkligen  $(x, y)$ -System in die allgemeine geometrische Imaginärtheorie einordnet. Es sei  $I$  derjenige imaginäre Punkt der unendlichfernen Geraden, der aus dieser von jeder im positiven Drehsinn gerichteten Rechtwinkel-Strahleninvolution der  $(x, y)$ -Ebene ausgeschnitten wird. Verbindet man  $I$  mit allen Punkten der  $x$ -Achse, so hat der reelle Punkt der Geraden, die  $I$  mit dem Punkte  $x = a + ia'$  der  $x$ -Achse verbindet, offenbar die Koordinaten  $x = a, y = a'$ .

Durch unsere Ausführungen hoffen wir gezeigt zu haben, daß die hier verwendete Pfeil-Darstellung mindestens im linearen und quadratischen Gebiet einige Vorteile bietet.

L. LOCHER-ERNST, Winterthur.

## Quasiarithmetische Mittelwerte<sup>1)</sup>

IV. Die Jensensche Ungleichung erlaubt — wie gesagt —, eine quasiarithmetische Mittelbildung nach konvexer (oder konkaver) Funktion mit dem entsprechenden arithmetischen Mittel zu vergleichen.

Setzen wir z. B.  $f(x) = x^p$ , so führt uns dies zum Potenzmittel

$$m = \left( \frac{\sum k_i x_i^p}{\sum k_i} \right)^{1/p}.$$

Hier sind verschiedene Fälle zu unterscheiden bezüglich  $p$ , welches  $\neq 0$  und ganz vorausgesetzt sei (was nicht notwendig wäre). Man kann zeigen, daß der Fall  $p = 0$  mit dem geometrischen Mittel identisch ist<sup>2)</sup>;  $p = 1$  ergibt das arithmetische Mittel. — Betrachten wir vorerst das Intervall  $-\infty < x < +\infty$ , so ist  $x^p$  für gerades, positives oder negatives  $p$  eine konvexe oder konkave, aber nicht monotone Funktion; ist

<sup>1)</sup> Erster Teil in Heft 5 (1949) dieser Zeitschrift.

<sup>2)</sup> H. JECKLIN und M. EISENRING, *Die elementaren Mittelwerte*, Mitt. Ver. schweiz. Vers.-Math. 47, 1 (1947).