

# Die Steinersche Hypozykloide

Autor(en): **Stoll, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **5 (1950)**

Heft 3

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-14907>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

betrachtet werden, sehr häufig vorkommt, unter sehr allgemeinen Voraussetzungen überhaupt die einzige mögliche Verteilung darstellt. Wenn sich beispielsweise ein Teilchen in aufeinanderfolgenden Schritten vom Nullpunkt aus längs einer Geraden bewegt und  $x_k$  den Zuwachs der Abszisse beim  $k$ -ten Schritt bedeutet, so stellt die totale Abszisse  $x = x_1 + \dots + x_n$  eine stetige stochastische Variable dar, und das Ganze wird als ein stetiger stochastischer Prozeß bezeichnet. Nach den vorausgegangenen Ausführungen ist es verständlich, daß  $x$  sehr häufig einer Normalverteilung gehorcht. Es sind vor allem russische Mathematiker, wie KHINTSCHINE und KOLMOGOROFF, und daneben der Franzose P. LÉVY, welche die stochastischen Prozesse untersuchten und auch enge Beziehungen mit der Theorie gewisser partieller Differentialgleichungen (parabolische und elliptische Typen) entdeckten. Nach der neuesten Entwicklung in den USA. versucht man umgekehrt, partielle Differentialgleichungen als einen stochastischen Prozeß zu interpretieren und mit den modernen Rechenmaschinen numerisch zu behandeln und zu lösen. Tatsächlich öffnen sich damit jetzt neue und vielleicht sehr fruchtbare Möglichkeiten der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Analysis.

Nach Aussagen namhafter Biologen wäre es sehr wertvoll, wenn unsere schweizerischen Mittelschüler und insbesondere auch die Gymnasiasten eine bescheidene Einführung in die allerelementarsten Fragestellungen und Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik in ihrem Mathematikunterricht erhielten<sup>1)</sup>. Als Mathematiker kann ich mich diesem Standpunkt nur anschließen. Es ergibt sich hier eine neue Möglichkeit, die Mathematik mit andern Wissenschaften zu verknüpfen und die erkenntnistheoretische Tragweite ihrer Methoden von allgemeinen Gesichtspunkten aus zu beleuchten.

Zum Schlusse seien einige Bücher aus der überaus umfangreichen Literatur betreffend Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik genannt:

- V. MISES, *Wahrscheinlichkeitsrechnung* (S. Rosenberg, Publishers, New York 1945).  
 H. CRAMÉR, *Mathematical Methods of Statistics* (Princeton 1946).  
 A. KHINTSCHINE, *Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Springer, Berlin 1933).  
 A. KOLMOGOROFF, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Springer, Berlin 1933).

WALTER SAXER, Zürich

## Die Steinersche Hypozykloide

*Vorbemerkung:* JAKOB STEINER hat die wichtigsten Eigenschaften dieser Kurve im Jahre 1856 bekanntgegeben, nach seiner Gewohnheit ohne Beweise (Ges. Werke, Bd. 2, S. 641–647). CLEBSCH, CREMONA, BATTAGLINI, PAINVIN, LAGUERRE u. a. haben das Thema aufgegriffen, zum Teil unter allgemeinen Gesichtspunkten. Eine reiche Fülle von Eigenschaften findet man in einer neueren Arbeit von J. LEMAIRE<sup>2)</sup>. Die vorliegende Arbeit schöpft aus diesen Quellen, geht aber zum Teil eigene Wege. Sie will auf den schönen und so leicht erreichbaren Garten hinweisen, indem sie eine Aus-

<sup>1)</sup> Siehe z. B. H. STOHLER, *Algebra*, Leitfaden dritter Teil (Unterrichtswerk des Vereins Schweizerischer Mathematiklehrer) (Orell Füßli Verlag, Zürich 1938).

<sup>2)</sup> J. LEMAIRE, *Hypocycloïdes et Epicycloïdes* (Vuibert, Paris 1929).

wahl von Eigenschaften, ausgehend von den besonderen Gegebenheiten der Kurve und unter Verzicht auf Verallgemeinerungen, in elementargeometrischer Weise entwickelt und zeigt, wie sich in ihnen allgemeine Eigenschaften des Dreiecks widerspiegeln. Solche werden daher in einem ersten Abschnitt zusammengestellt. Ein paar naheliegende und einfache Grenzübergänge werden nicht verschmäht. Dagegen fallen, aus Raummangel und um den elementaren Charakter der Arbeit nicht zu stören, alle Eigenschaften weg, bei denen Kegelschnitte eine Rolle spielen. Da man wohl die Trauben genießt, aber nicht die Winzer, werden keine Autornamen genannt, ausgenommen dort, wo solche als Sachbezeichnung dienen.

### Dreieckseigenschaften

Bezeichnet man im Dreieck  $ABC$  (Figur 1) den Höhenschnittpunkt mit  $H$ , die Seitenmitten mit  $A_1, B_1, C_1$ , die Höhenfußpunkte mit  $A_2, B_2, C_2$  und die Mitten der

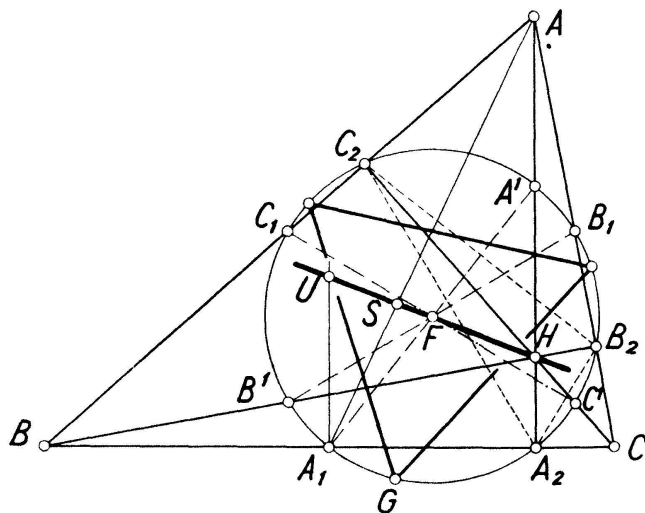


Fig. 1

oberen Höhenabschnitte mit  $A^1, B^1, C^1$ , dann sind  $A_1B^1$  und  $B_1A^1$  zu  $CH$  parallel und je halb so lang, und außerdem ist  $A_1B_1$  zu  $CH$  normal.  $A_1A^1$  und  $B_1B^1$  sind daher Rechtecksdiagonalen, halbieren sich somit und sind gleich lang. Dasselbe gilt von  $B_1B^1$  und  $C_1C^1$ . Alle drei sind daher Durchmesser desselben Kreises, und die Höhenfußpunkte liegen als Scheitel rechter Winkel über Durchmessern ebenfalls auf ihm. Dieser «Feuerbach-Kreis» ist in bezug auf  $H$  zum Umkreis von  $ABC$  homothetisch und also halb so groß wie dieser.

Der Mittelpunkt  $F$  des Feuerbach-Kreises halbiert somit die Verbindung von  $H$  mit dem Umkreismittelpunkt  $U$ , und es ist  $HA^1$  so lang wie  $UA_1$ . Deshalb teilen sich  $HU$  und  $AA_1$  im Verhältnis 2:1, so daß ihr Schnittpunkt  $S$  Schwerpunkt von  $ABC$  ist. Die vier Punkte  $U, S, F, H$  liegen in dieser Reihenfolge auf der «Euler-Geraden» und haben das Abstandsverhältnis 2:1:3.

Auf dem Feuerbach-Kreis liegen die Bögen  $\widehat{A^1B_2}$  und  $\widehat{B_1C^1}$  zwischen Parallelen und sind also gleich lang, ebenso  $\widehat{A^1C_2}$  und  $\widehat{B_1C^1}$ .  $A^1$  halbiert daher den Bogen  $\widehat{B_2C_2}$ , und  $A_1A^1$  ist Mittelsenkrechte zu  $B_2C_2$ ; entsprechend die beiden andern Durchmesser. Ferner gilt nach Größe und Sinn bis auf ganze Vielfache des Umfangs  $\widehat{A_2B_1} \equiv \widehat{C_1A_1}$ ,

oder für irgendeinen Punkt  $G$  der Kreislinie  $\widehat{GB}_1 - \widehat{GA}_2 \equiv \widehat{GA}_1 - \widehat{GC}_1$ . Bestimmt man nun  $G$  auf dem äußeren Bogen  $A_1A_2$  so, daß

$$\widehat{GA}_2 \equiv -2 \widehat{GA}_1 \quad (1)$$

ist, dann folgt

$$\widehat{GA}_1 + \widehat{GB}_1 + \widehat{GC}_1 \equiv 0. \quad (2)$$

Diese Kongruenz ist in  $A, B, C$  symmetrisch und gilt daher ebenso für die entsprechenden Teilpunkte auf den Bögen  $\widehat{B}_1\widehat{B}_2$  und  $\widehat{C}_1\widehat{C}_2$ . Die drei Teilpunkte bilden ein gleichseitiges Dreieck, entsprechend dem Umstand, daß mit einer seiner Ecken auch die andern beiden die Kongruenz (1) erfüllen: ich nenne sie «*Grundpunkte*» des Feuerbach-Kreises bzw. des Dreiecks.

Da  $\widehat{GA}^1$  und  $\widehat{GA}_1$  sich um einen halben Umfang unterscheiden, so gilt mit (1) auch

$$\widehat{GA}_2 \equiv -2 \widehat{GA}^1.$$

Jeder der vier Punkte  $A, B, C, H$  ist Höhenschnittpunkt des Dreiecks der drei andern. Die vier Dreiecke haben die Höhenfußpunkte und die Grundpunkte des Feuerbach-Kreises gemeinsam.  $A, B, C$  und  $H$  sind die Berührungskreismittelpunkte des Höhenfußpunktsdreiecks und Ecken eines *vollständigen orthogonalen Vierecks*, dessen Gegenseiten konstante Quadratsumme haben, nämlich  $16 r^2$ ,  $r =$  Radius des Feuerbach-Kreises, weil  $\overline{HA}^1 = \overline{UA}_1$  und  $\overline{UA}_1^2 + \overline{A_1B}^2 = 4 r^2$  ist.

Drehen sich drei Gerade  $a, b, c$  mit gleicher Winkelgeschwindigkeit beziehlich um die Punkte  $A_1, B_1, C_1$ , dann bleiben die von ihnen in jedem Moment gebildeten Dreiecke  $ABC$  ähnlich.  $A, B$  und  $C$  bewegen sich je auf einem von drei Kreisen, die einen Punkt  $D$  gemeinsam haben, und fallen gleichzeitig mit  $D$  zusammen. Wegen der Konstanz der Winkel  $DBA_1$  und  $A_1CD$  ist auch Winkel  $BDC$  konstant, ebenso die Winkel  $CDA$  und  $ADB$ , d. h.  $D$  hat in bezug auf alle Dreiecke  $ABC$  ähnliche Lage.

Wird  $a$  normal zu  $DA_1$ , so fallen  $B$  und  $C$  in die Gegenpunkte  $\overline{B}$  und  $\overline{C}$  von  $D$  auf ihren Kreisen, so daß auch  $b$  und  $c$  normal werden zu  $DB_1$  bzw.  $DC_1$ .  $\overline{DA}$  und damit  $\overline{A\overline{B}\overline{C}}$  haben maximale Größe.

### Die Schar der $S$ -Geraden

Auf einem festen Kreis ( $K$ ) sei ein Grundpunkt  $G$  gegeben. Jedem Punkt  $A_1$  von ( $K$ ) werde durch die Kongruenz (1) des vorigen Abschnittes ein Punkt  $A_2$  auf ( $K$ ) zugeordnet. Die Zuordnung ist eindeutig. Jedem Punkt  $A_1$  von ( $K$ ) entspricht genau eine Gerade  $a = A_1A_2$ ; ich nenne sie *S-Gerade*, um an STEINER zu erinnern.  $A_1$  heißt *Primärpunkt*,  $A_2$  *Sekundärpunkt* von  $a$ .

Bedeutet  $\alpha$  den Neigungswinkel von  $a$  gegen die Kreistangente  $g$  in  $G$ , dann ist  $\alpha$  nach Größe und Sinn bis auf ganze Vielfache von  $\pi$  dem Peripheriewinkel über  $\widehat{GA}_1$  entgegengesetzt gleich. Zu jeder Richtung gehört genau eine *S-Gerade*.

Von den beiden Schnittpunkten einer *S-Geraden* mit ( $K$ ) ist der eine primär und der andere sekundär. Zu einem Sekundärpunkt gehören aber kraft (1) zwei diametral

gegenüberliegende Primärpunkte. Die zugehörigen  $S$ -Geraden heißen ein *Paar* oder *konjugiert*. Sie sind normal zueinander, und wenn zwei  $S$ -Gerade zueinander normal sind, dann haben sie den Sekundärpunkt gemeinsam, weil keine zwei endlichen  $S$ -Geraden die gleiche Richtung haben.

Durch einen Punkt von  $(K)$  gehen also primär eine und sekundär zwei, im ganzen genau drei  $S$ -Gerade. Die *Hüllkurve*  $(S)$  — «Steiner-Kurve» — ihrer einparametrischen Schar ist eine *Kurve dritter Klasse*. Durch jeden Punkt der Ebene gehen drei  $S$ -Gerade, von denen wenigstens eine reell ist. Liegt der Punkt unendlich fern, so ist nur eine  $S$ -Gerade endlich, die andern beiden fallen mit der unendlich fernen Geraden zusammen.

Die  $S$ -Schar kann erzeugt werden durch zwei Punkte, die sich auf  $(K)$  gegenläufig bewegen, der eine doppelt so schnell wie der andere, und die sich in  $G$  begegnen und folglich auch in  $G'$  und  $G''$ , die mit  $G$  ein gleichseitiges Dreieck bilden. Sie kann aber auch dadurch erzeugt werden, daß sich ein Punkt  $A_1$  auf  $(K)$  bewegt, während sich eine Gerade  $a$  im Gegensinn und mit halber Winkelgeschwindigkeit um  $A_1$  dreht und  $(K)$  in  $G$  und folglich auch in  $G'$  und  $G''$  berührt, wenn  $A_1$  mit diesen Punkten zusammenfällt.

Sind  $A_1A_2$  und  $B_1B_2$  zwei  $S$ -Gerade mit ihren Primär- und Sekundärpunkten und schneiden sie sich in  $C$ , so ist zufolge der Definition  $\widehat{A_2B_2} \equiv -2\widehat{A_1B_1}$ . Daraus folgt, daß der Winkel  $A_2CB_2$  ebenso groß ist wie jeder der Winkel  $CA_2B_1$  und  $CB_2A_1$ , d.h. *von den Primärpunkten zweier  $S$ -Geraden hat jeder den gleichen Abstand vom Sekundärpunkt der andern und vom Schnittpunkt beider*. Dies ist die grundlegende Eigenschaft.

Läßt man die beiden Geraden unbegrenzt zusammenrücken, so erkennt man insbesondere: *Der Berührungspunkt einer  $S$ -Geraden mit  $(S)$  liegt ebensoweit diesseits ihres Primärpunktes wie ihr Sekundärpunkt jenseits*.  $(S)$  verläuft also außerhalb  $(K)$  und innerhalb eines konzentrischen und dreimal so großen Kreises.

Ferner folgt: *Die Berührungspunkte eines Paares haben einen Abstand, welcher doppelt so groß ist wie der Durchmesser von  $(K)$* ; denn die Primärpunkte eines Paares sind Gegenpunkte auf  $(K)$ .

Auch die folgenden Eigenschaften ergeben sich fast unmittelbar aus der grundlegenden Eigenschaft:

*Die Schnittpunkte einer  $S$ -Geraden  $x$  mit einem festen Paar haben vom Primärpunkt  $X_1$  von  $x$  denselben Abstand wie der Sekundärpunkt  $A_2$  des Paares. Wird  $X_1$  Gegenpunkt von  $A_2$ , dann geht  $x$  durch die Berührungspunkte des Paares mit  $(S)$ , und die Konjugierte von  $x$  geht durch  $A_2$ .*

*Für die drei  $S$ -Geraden durch einen Punkt  $P$  gilt: Die Primärpunkte von je zweien liegen auf der Mittelsenkrechten zu  $P$  und dem Sekundärpunkt der dritten. Die Sekundärpunkte von je zweien liegen mit  $P$  auf einem Kreis um den Primärpunkt der dritten. Die Konjugierten von je zweien schneiden sich auf der dritten, und der Schnittpunkt ist in bezug auf den Primärpunkt symmetrisch zu  $P$ .*

Die drei  $S$ -Geraden durch einen Punkt bilden mit ihren drei Konjugierten ein *vollständiges orthogonales Viereck*. Zu jedem Punkt gehören drei weitere, die mit ihm ein solches Viereck bilden. Umgekehrt sind die Seiten und Höhen jedes Dreiecks, das  $(K)$  zum Feuerbach-Kreis und  $G$  zum Grundpunkt hat,  $S$ -Gerade zu  $(K)$  und  $G$ .

Die durch den Berührungspunkt  $A_0$  einer  $S$ -Geraden  $A_1A_2$  gehende, von ihr verschiedene  $S$ -Gerade heißt zu ihr *adjungiert*. Sie ist parallel zu  $OA_1$ ,  $O$  Mittelpunkt von  $(K)$ . Sie ist aber auch adjungiert zur Konjugierten  $A^1A_2$  von  $A_1A_2$ ; denn sie ist parallel zu  $OA^1$ . Ein Paar bildet mit seiner Adjungierten die bereits beschriebene Figur.

Bewegt sich  $X$  auf der  $S$ -Geraden  $A_1A_2$ , dann sind die Primärpunkte der beiden andern  $S$ -Geraden durch  $X$  bestimmt als Schnittpunkte der Mittelsenkrechten von  $A_2X$  mit  $(K)$ . Die beiden fallen für genau zwei Lagen von  $X$  zusammen, und  $X$  wird dann Punkt von  $(S)$ .  $A_1A_2$  hat also mit  $(S)$  außer dem Berührungspunkt zwei Schnittpunkte gemein, d. h.  $(S)$  ist von der vierten Ordnung.

### Gestalt und Größe von $(S)$

Der Kreis  $(K)$  und die Grundpunkte  $G, G', G''$  seien gegeben (Figur 2). Die Kreistangente  $g$  in  $G$  ist  $S$ -Gerade, ihr Primär-, Sekundär- und Berührungspunkt fallen mit  $G$  zusammen, und  $(S)$  berührt  $(K)$  in  $G$ . Bewegt sich nun der Primärpunkt  $A_1$  von  $a$  von  $G$  aus auf  $(K)$ , dann bewegt sich der Sekundärpunkt  $A_2$  im Gegensinn doppelt so weit, während der Berührungspunkt  $A_0$  von  $(K)$  nach außen abrückt, wobei stets  $A_0A_1 = A_1A_2$  ist. Die Bahn von  $A_0$  wird nun mehr und mehr radial, und  $A_0$  erreicht die größte Entfernung vom Mittelpunkt  $O$ , wenn  $a$  durch  $O$  geht. Dies tritt erstmals ein, wenn  $A_1$  einen Sechstel des Umfanges zurückgelegt hat. Darnach nähert sich  $A_0$  wieder dem Kreis, so daß in der Extremlage  $\mathfrak{G}''$  eine Spitze entsteht, und erreicht  $(K)$  wieder in  $G'$ . Es ist  $O\mathfrak{G}'' = 3OG$ , und die Kurvenbögen  $\mathfrak{G}''G$  und  $\mathfrak{G}''G'$  sind symmetrisch in bezug auf  $O\mathfrak{G}''$ . Nun wiederholt sich das Spiel noch zweimal.

$(S)$  besteht somit aus sechs kongruenten Bögen, die sich paarweise in  $G, G', G''$  und  $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}', \mathfrak{G}''$  zu einer geschlossenen Kurve aneinanderreihen, in den ersteren mit stetiger Krümmung, so daß Scheitelpunkte entstehen, in den letzteren mit Spitzen. Die drei Spitzentangenten sind zugleich Scheitelnormale und Symmetrieachsen von  $(S)$ .

Die Normale von  $(S)$  im Berührungspunkt  $A_0$  von  $a$  ist in bezug auf  $A_1$  zentralsymmetrisch zur Konjugierten  $a'$  von  $a$  und daher in bezug auf  $O$  zu dieser invers homothetisch im Verhältnis 3:1, d. h.: Die Evolute  $(\mathfrak{S})$  von  $(S)$  ist eine mit  $(S)$  konzentrische und dreimal so große Steiner-Kurve; ihre Scheitelpunkte sind die Spitzen von  $(S)$ . Umgekehrt ist die Evolvente von  $(S)$  eine dreimal kleinere Steiner-Kurve, deren Spitzen die Scheitelpunkte von  $(S)$  sind.

Gemäß dem vorigen Abschnitt schneidet  $(S)$  auf jeder seiner Tangenten  $b$  eine Strecke  $A_0A^0$  ab, die doppelt so lang ist wie der Durchmesser des Scheitelkreises  $(K)$ . Die Tangenten in  $A_0$  und  $A^0$  sind konjugiert, und ihr Schnittpunkt  $A_2$  (Sekundärpunkt) und die Mitte  $B_1$  von  $b$  (Primärpunkt) sind Gegenpunkte auf  $(K)$ . Die dritte Tangente aus  $A_2$  ist zu  $b$  normal (konjugiert) und ihr Schnittpunkt  $B_2$  mit  $b$  ebenso weit diesseits von  $B_1$  wie der Berührungspunkt  $B_0$  jenseits. Nun entsprechen sich in der Homothetie zwischen  $(S)$  und ihrer Evolute die drei Normalen in  $A_0, B_0$  und  $A^0$  und die drei Tangenten aus  $A_2$ . Also: Die Normalen im Berührungspunkt und in den Schnittpunkten einer Tangente mit  $(S)$  schneiden sich auf dem Spitzenkreis.

$\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$  seien Berührungs-, Primär- und Sekundärpunkt der Evolutentangente durch  $A_0$ . Wegen der Rechtecksfigur ist  $A_0\mathfrak{A}_2$  so lang wie  $A_2A^0$ , also doppelt so lang

wie  $A_2A^1$ , und wegen der Homothetie ist  $\mathcal{N}_1\mathcal{N}_2$  dreimal und  $\mathcal{N}_0\mathcal{N}_2$  sechsmal so lang wie  $A^1A_2$ . Dieses aber ist doppelt so lang wie der Abstand  $Oa$ . Daher: Die Sehnen, die der Spitzenkreis auf den Normalen von  $(S)$  abschneidet, werden durch deren Fußpunkte im Verhältnis 1:2 geteilt, kleinerer Teil auf der konkaven Seite, und die Krümmungsradien betragen  $4/3$  der entsprechenden Sehnen oder das achtfache des Abstandes der Tangente von  $O$ .

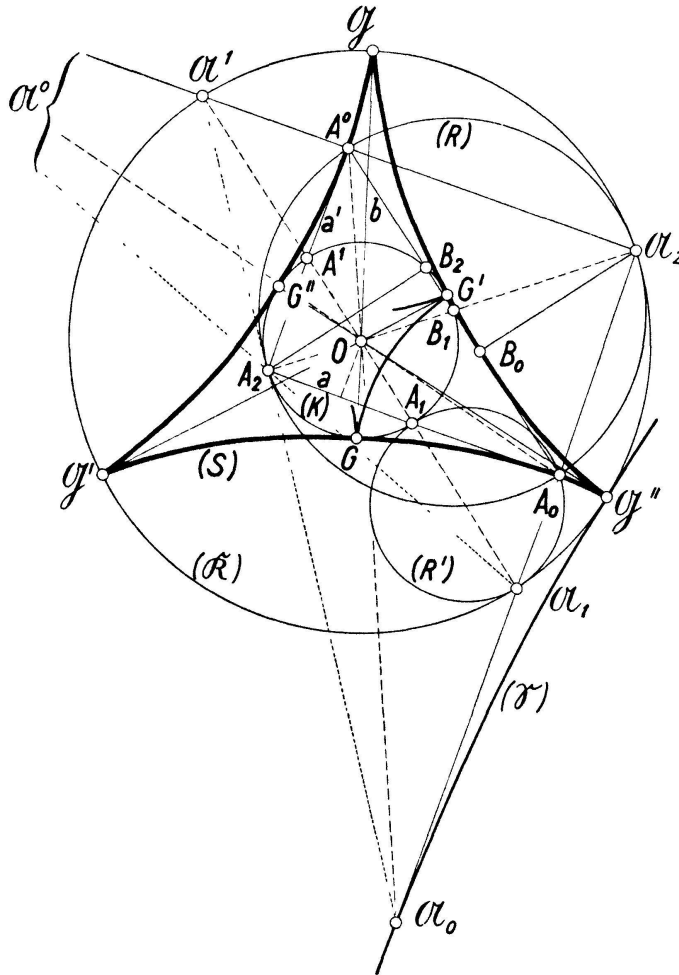


Fig. 2

Die Länge des Kurvenbogens  $\widehat{GA_0}$  beträgt demnach  $4/3$  von  $A_2A_1$  und insbesondere die Länge von  $\widehat{GG''}$   $4/3$  des Durchmessers von  $(K)$ , so daß die *Totallänge von  $(S)$  das achtfache des Durchmessers ihres Scheitelkreises* beträgt.

Zwischen zwei unendlich benachbarten Normalen werden vom Spitzenkreis und vom betreffenden Bogen von  $(S)$  Sektoren begrenzt, deren Flächenverhältnis bis auf unendlich Kleine  $9:16:36$  ist. Daher: Die Fläche, die vom Spitzenkreis und von zwei Normalen desselben Hauptbogens von  $(S)$  begrenzt ist, wird von dem betreffenden Bogen von  $(S)$  im Verhältnis  $7:20$  geteilt. Daraus ergibt sich: *Die von  $(S)$  umschlossene Fläche beträgt  $2/9$  der Fläche des Spitzenkreises oder das Doppelte des Scheitelkreises.* (Schluß folgt.)

A. STOLL, Zürich.