Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 5 (1950)
Heft: 1

Artikel: Über die Rektifikation eines Kurvenbogens
Autor: Völlm, Ernst
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14902

même aire (et il est à remarquer que la nécessité de cette condition est beaucoup plus difficile à démontrer que la suffisance)[1].

Il en est cependant tout autrement pour les polyèdres, où on peut démontrer (à l'aide de l'axiome du choix) que deux polyèdres quelconques (même ayant des volumes différents) sont équivalents par décomposition finie[2].

Aussi la sphère solide est équivalente par décomposition finie à un cube. Or, le problème reste ouvert quel est le plus petit nombre naturel n pour lequel la sphère solide est $\underset{n}{=}$ à un cube.

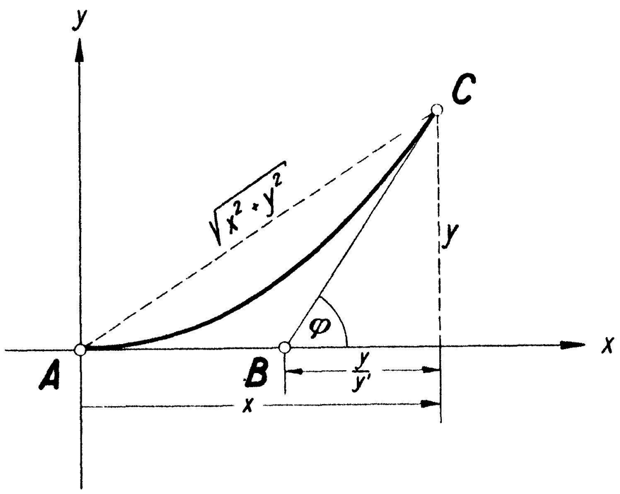
Cependant on ne sait pas si le cercle (l'intérieur et la circonférence) est équivalent par décomposition finie à un carré de même surface (ainsi, dans ce sens, le problème de la quadrature du cercle n'est pas encore résolu).

On peut démontrer qu'une sphère solide S peut être décomposée en 5 parties sans points communs deux à deux dont 2 et 3 donnent respectivement, après des mouvements convenables, deux sphères solides sans points communs de même rayon que la sphère S[3]. Le nombre 5 ne peut pas être remplacé ici par un nombre plus petit. (Les mots «peut être décomposée» doivent être pris ici dans le sens idéaliste: l'existence des ensembles en lesquels on décompose la sphère est démontrée à l'aide de l'axiome du choix et on ne sait pas les définir effectivement).

W. SIERPIŃSKI, Varsovie.

Über die Rektifikation eines Kurvenbogens

Ergebnis: Für die Länge eines monoton gekrümmten Kurvenbogens AsC (siehe Figur) ist die zugehörige Sehne AC ein zu kleiner Näherungswert. Die Summe



$AB + BC$ der Abschnitte beider Tangenten in den Endpunkten A und C dagegen

[1]) S. BANACH et A. TARSKI, Fund. Math. *6*, 260 (1924).

[2]) L. c., p. 263.

[3]) R. M. ROBINSON, Fund. Math. *34*, 246 (1947). Ce résultat a été précédé par des autres, où le nombre 5 a été remplacé par un nombre plus grand: voir S. BANACH et A. TARSKI, Fund. Math. *6*, 262 (1924) (Lemme 22). – J. VON NEUMANN, Fund. Math. *13*, 77 (1929). – W. SIERPIŃSKI, Fund. Math. *33*, 299 (1945); et aussi Fund. Math. *35*, 157 (1948).

liefert einen zu großen Näherungswert. Es wird gezeigt, daß das gewogene Mittel

$$\frac{2\,AC + (AB + BC)}{3}$$

für die Bogenlänge ein Näherungswert 4. Ordnung ist.

Beweis: Der Bogen AC kann so in den ersten Quadranten eines rechtwinkligen Koordinatensystems gelegt werden, daß er im Ursprung beginnt und dort die x-Achse berührt. Dann ist die Ordinate y seines Endpunktes C eine Funktion seiner Abszisse x und deren Ableitung $y' = \operatorname{tg}\varphi$.

Man findet leicht die folgenden Beziehungen:

$$AC = \sqrt{x^2 + y^2} = x\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}, \tag{1}$$

$$AB = x - \frac{y}{y'}, \qquad BC = \frac{y}{\sin\varphi} = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2},$$

also

$$AB + BC = x + \frac{y}{y'}\left[\sqrt{1 + y'^2} - 1\right] \tag{2}$$

und

$$\text{Bogen } AsC = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2}\,dx. \tag{3}$$

Setzen wir voraus, daß y eine Taylor-Entwicklung nach x besitzt, so wird sie wegen der besonderen Wahl des Koordinatensystems mit dem Gliede zweiter Ordnung beginnen, also die Form haben:

$$y = a\,x^2 + b\,x^3 + c\,x^4 + d\,x^5 + \cdots. \tag{4}$$

Wir haben nun die Ausdrücke (1), (2) und (3) nach Potenzen von x zu entwickeln. Da für hinreichend kleine positive x der positive Quotient $(y/x)^2 < 1$ sein wird, ist die bekannte Binomialentwicklung

$$\sqrt{1 + u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 \ldots$$

auf die in (1) auftretende Wurzel anwendbar. So erhält man durch leichte Rechnung bei Beschränkung auf die Glieder von höchstens 5. Ordnung unter Berücksichtigung von (4):

$$AC = x + \frac{a^2}{2}x^3 + a\,b\,x^4 + \frac{-a^4 + 8\,a\,c + 4\,b^2}{2}x^5 + \cdots. \tag{5}$$

Aus (4) folgt ferner:

$$y' = 2\,a\,x + 3\,b\,x^2 + 4\,c\,x^3 + 5\,d\,x^4 + \cdots, \tag{6}$$

$$y'^2 = 4\,a^2x^2 + 12\,a\,b\,x^3 + (9\,b^2 + 16\,a\,c)\,x^4 + (20\,a\,d + 24\,b\,c)\,x^5 + \cdots, \tag{7}$$

und da auch $0 < y'^2 < 1$ für hinreichend kleine positive x, wird die erwähnte Binomialentwicklung auch auf die in (2) und (3) vorkommende Wurzel anwendbar sein. Das Ergebnis der Rechnung wird auf Grund von (7) sein:

$$\sqrt{1 + y'^2} = 1 + 2\,a^2x^2 + 6\,a\,b\,x^3 + \frac{-4\,a^4 + 9\,b^2 + 16\,a\,c}{2}x^4 + \cdots. \tag{8}$$

Auch der Quotient y/y', der für $x=0$ verschwindet, wird für absolut kleine Werte von x entwickelbar sein. Voraussetzend, daß in (4) $a \neq 0$ ist, findet man durch Division von (4) durch (6):

$$\frac{y}{y'} = \frac{x}{2} - \frac{b}{4a} x^2 + \frac{3b^2 - 4ac}{8a^2} x^3 + \cdots. \tag{9}$$

Mit dieser Reihe und der unter (8) gewonnenen erhält man für den Ausdruck (2) bis zur 5. Ordnung:

$$AB + BC = x + a^2 x^3 + \frac{5ab}{2} x^4 + \frac{-2a^4 + 6ac + 3b^2}{2} x^5 + \cdots. \tag{10}$$

Schließlich folgt aus (3) und (8) für den Bogen selbst die Entwicklung:

$$AsC = x + \frac{2a^2}{3} x^3 + \frac{3ab}{2} x^4 + \frac{-4a^4 + 16ac + 9b^2}{10} x^5 + \cdots. \tag{11}$$

Die Reihen (5), (10) und (11) zeigen, daß die Näherungswerte AC und $AB + BC$ in den Gliedern 1. und 2. (verschwindender) Ordnung unter sich und mit dem genauen Wert AsC übereinstimmen. Nun ergibt sich aus (5) und (10) für den nachfolgenden Mittelwert der beiden Näherungen die Entwicklung:

$$\frac{2AC + (AB + BC)}{3} = x + \frac{2a^2}{3} x^3 + \frac{3ab}{2} x^4 + \frac{-5a^4 + 20ac + 10b^2}{12} x^5 + \cdots. \tag{12}$$

Wie behauptet, stimmen also die Reihen (11) und (12) nach Potenzen der Abszisse x bis einschließlich der 4. Ordnung überein. Durch geeignete Mittelwertbildung kann also aus den beiden erstbetrachteten Näherungen eine bessere gewonnen werden, deren Ordnung um 2 höher ist.

Im Verlaufe der Rechnung mußten wir voraussetzen, daß in (4) $a \neq 0$ sei. Ist $a = 0$ und $b \neq 0$, beginnt also in (4) die Entwicklung mit dem Gliede 3. Ordnung, so zeigt eine Wiederholung der obigen Rechnung, daß die Behauptung richtig bleibt. Fängt aber die Entwicklung (4) mit einem Gliede von höherer als 3. Ordnung an, so läßt sich zeigen, daß schon die groben Näherungen (10) und (11) und damit *a fortiori* ihr Mittel (12) den Bogen in mindestens 5. Ordnung annähern.

Zwei Kontrollbeispiele: 1. Ist AsC ein Kreisbogen vom Radius r und Zentriwinkel 60°, so ist die Sehne $AC = r$, die Summe der Tangentenabschnitte

$$AB + BC = 2\,AB = \frac{2}{\sqrt{3}}\, r = 1{,}155\, r.$$

Vom anzunähernden Bogen $AsC = \pi r/3 = 1{,}047\, r$ weichen diese beiden Näherungen um $0{,}05\, r$ und $0{,}11\, r$ ab. Das gewogene Mittel

$$\frac{2r + 1{,}155\, r}{3} = 1{,}052\, r$$

unterscheidet sich vom Bogen nur noch um $0{,}005\, r$. Dieser Fehler ist also zehnmal kleiner als der kleinere der beiden vorgenannten.

2. Als zweites Beispiel betrachten wir den Bogen der Parabel $y = x^2$, der durch die Punkte mit den Abszissen 0 und x begrenzt ist. Da bekanntlich die Tangente des

Punktes C mit der Abszisse x die x-Achse im Punkte $x/2$ schneidet, haben wir

$$AB = \frac{x}{2}, \qquad BC = \sqrt{\frac{x^2}{4} + x^4} = \frac{x}{2}\sqrt{1 + 4x^2},$$

also

$$AB + BC = \frac{x}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 4x^2}\right),$$

während für die Sehne gilt:

$$AC = \sqrt{x^2 + x^4} = x\sqrt{1 + x^2}.$$

Anderseits findet man für den Bogen:

$$AsC = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int_0^x \sqrt{1 + 4x^2}\,dx.$$

Man bestätigt durch Differenzieren:

$$AsC = \frac{x}{2}\sqrt{1 + 4x^2} + \frac{1}{4}\lg\left(2x + \sqrt{1 + 4x^2}\right).$$

Auf Grund dieser Formeln sind die zwei Parabelbögen mit der Endabszisse 1 oder 2 berechnet worden, mit nachstehendem Ergebnis:

Abszisse des Endpunktes	AC	$AB+BC$	Gewogenes Mittel	Genauer Wert	Differenz
1	1,414	1,618	1,482	1,479	0,003
2	4,472	5,123	4,689	4,647	0,042

Auch in diesem Beispiel erhöht sich die Genauigkeit in bemerkenswertem Maße beim Übergang von den beiden erstbetrachteten Näherungswerten zu ihrem gewogenen Mittel, obschon die beim Beweis benützten Voraussetzungen nicht längs des ganzen Kreis- oder Parabelbogens erfüllt sind.

Die hier geschilderte Methode kann angewendet werden, um näherungsweise eine Bogenlänge graphisch oder numerisch zu bestimmen. Im ersten Falle wird die Güte der Ergebnisse wesentlich von der Genauigkeit der Tangentenkonstruktion abhängen. Im zweiten Falle wird sich die Methode empfehlen, wenn von der in Frage kommenden Funktion wohl die Ableitung, nicht aber das Bogenintegral berechenbar ist.

ERNST VÖLLM, Zürich.

Kleine Mitteilungen

I. *Eine Verallgemeinerung des Pascalschen Dreiecks*

Die n-te Potenz eines k-gliedrigen Polynoms heißt ausgeschrieben

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum P^{(n)}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k}\, x_1^{\nu_1} \cdot x_2^{\nu_2} \cdots x_k^{\nu_k}, \tag{1}$$

mit

$$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_k = n.$$

Dabei ist $P^{(n)}_{(\nu_1, \ldots, \nu_k)}$ die Anzahl der Permutationen mit Wiederholungen von n Ele-