Bericht

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **5 (1950)**

Heft 5

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Sei nun $n = q\,s > 4$ eine zusammengesetzte Zahl, wobei q den kleinsten eigentlichen Teiler von n bezeichnet. Dann enthält D_2 keinen oder nur einen Gitterpunkt – nämlich $(n/2,\, 1)$ – an seinem Rande (abgesehen von den Eckpunkten), je nachdem $q > 2$ oder $q = 2$ ist. Dagegen hat D_s den Gitterpunkt $(q,\, 1)$ bzw. noch die weiteren Gitterpunkte $(2,\, 1),\ (4,\, 2),\ \ldots,\ (n-2,\, n/2-1)$ an seinem Rande (entsprechend den beiden Fällen), woraus nach (1) folgt, daß D_2 in jedem Falle eine größere Anzahl von Gitterpunkten als D_s im Innern enthält. Damit ist der Satz bewiesen. P. MEDGYESSY, Debrecen.

Bericht

Zur Graeffeschen Methode für die Auflösung algebraischer Gleichungen

(Zusammenfassung eines Vortrages von Herrn Prof. Dr. A. OSTROWSKI im Mathematischen Kolloquium Winterthur am 13. Februar 1950)

Die Koeffizienten a_k in der Gleichung

$$f_0(z) \equiv a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = 0 \tag{1}$$

sind symmetrische Funktionen der Wurzeln $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ der Gleichung. Eine Grundidee des Verfahrens von GRAEFFE ist, diese Symmetrie zu zerstören, indem Ausdrücke (Funktionen der Koeffizienten) konstruiert werden, für deren Wert wesentlich nur noch *eine* Wurzel maßgebend ist. GRAEFFE verwendet dazu die «Transformierten» der Gleichung (1), d. h. Gleichungen, deren Lösung die zweiten, vierten, achten usw. Potenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind. Es sind dies:

$$f_k(z) \equiv a_n^{2k} \prod_{\nu=1}^{n} (z - \zeta_\nu^{2k}) \equiv a_0^{(k)} + a_1^{(k)} z + \cdots + a_n^{(k)} z^n = 0. \quad (k = 2, 4, 8, 16, \ldots)$$

Das Polynom $f_{2k}(z)$ kann berechnet werden, indem man das Produkt

$$(-1)^n f_k(z)\, f_k(-z) \equiv a_n^{4k} \prod_{\nu=1}^{n} (z - \zeta_\nu^{2k}) \prod_{\nu=1}^{n} (z + \zeta_\nu^{2k}) \equiv a_n^{4k} \prod_{\nu=1}^{n} (z^2 - \zeta_\nu^{4k})$$

bildet und darin z^2 durch z ersetzt.

Denkt man sich die Wurzeln der Gleichung (1) so numeriert, daß $|\zeta_1| \leqq |\zeta_2| \leqq \cdots \leqq |\zeta_n|$, und gilt für ein bestimmtes m: $|\zeta_m| < |\zeta_{m+1}|$, so folgt aus den Beziehungen von VIETA:

$$\lim_{k\to\infty} a_m^{(k)} (\zeta_{m+1}\, \zeta_{m+2} \cdots \zeta_n)^{-2k} = (-1)^{m-n} a_n^{(k)}. \tag{2}$$

Gilt sogar

$$|\zeta_{m-1}| < |\zeta_m| < |\zeta_{m+1}|, \tag{3}$$

so ergibt sich aus (2):

$$\zeta_m = \lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{-\frac{a_{m-1}^{(k)}}{a_m^{(k)}}}\,,$$

woraus theoretisch ζ_m berechnet werden kann. Diese Formel gilt aber nur unter der Voraussetzung (3), und die Werte von m, welche diese Bedingung erfüllen, sind nicht zum vornherein bekannt. GRAEFFE glaubte, die Schwierigkeit mit der folgenden Überlegung überwinden zu können: Führt man die Berechnungen mit einer festen Zahl von bedeutsamen Ziffern durch und ergibt sich bei dieser Genauigkeit für alle $k > k_0$ Übereinstimmung der Zahlen $a_m^{(2k)}$ und $\left[a_m^{(k)}\right]^2$, so ist $|\zeta_m| < |\zeta_{m+1}|$. Leider ist das insofern eine Täuschung, als die Rundungsfehler so groß werden können, daß sie diese Entscheidung nicht mehr erlauben. Transformiert man etwa die Gleichung

$$f_0(z) \equiv z^4 - 4\,z^3 + 5{,}999951\,z^2 - 4\,z + 1 = 0 \tag{4}$$

und rechnet dabei mit vier Dezimalen, so enthalten die Koeffizienten der dritten Transformierten bereits Fehler von $2^0/_0$, die der vierten solche von $35^0/_0$ und in der fünften wachsen die Fehler auf über $500^0/_0$ an!

Es ist dann allerdings auf anderem Weg (mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln und durch Einführung des sogenannten Newtonschen Diagramms) gelungen, die Methode von GRAEFFE in dieser Beziehung zu vervollständigen. Auf Einzelheiten kann im Rahmen dieses Berichtes nicht eingegangen werden. Der Leser sei dafür auf die Arbeit von A. OSTROWSKI, *Recherches sur la méthode de Graeffe et les zéros des polynomes et des séries de Laurent* (Acta math. *72*, 99 [1940]) verwiesen.

Die Gleichung (4) zeigt übrigens sehr schön, daß – obwohl natürlich die Wurzeln stetig von den Koeffizienten abhangen – eine geringe Änderung der letzteren einen beträchtlichen Einfluß auf die Wurzeln haben kann. Die Gleichung läßt sich nämlich elementar lösen, indem sich die linke Seite als Differenz zweier Quadrate schreiben läßt. Die Wurzeln sind:

$$z_1 \approx 1{,}0872; \qquad z_2 \approx 0{,}9198; \qquad z_{3,4} \approx 0{,}9965 \pm 0{,}0836\,i.$$

Rundet man aber den mittleren Koeffizienten auf 6, so erhält man die Gleichung $(z-1)^4 = 0$, deren Wurzel $z = 1$ gegenüber den obigen genaueren Werten Fehler (bezüglich Betrag) von $1^0/_{00}$ bis $87^0/_{00}$ aufweist, obwohl der Rundungsfehler beim Koeffizienten nur rund $0{,}01^0/_{00}$ beträgt!

Der Referent wies im Anschluß an diese Feststellungen noch darauf hin, daß die unvermeidlichen Rundungsfehler auch der Verwendung der modernen Riesenrechenmaschinen eine Grenze setzen. W. PROKOP.

Aufgaben

Aufgabe 70. Let $x_1, x_2, \ldots, x_n$ be any n real numbers and let be

$$E_n = \frac{\left(\sum_{r=1}^{n} |x_r|\right)^{n(n-1)/2}}{\prod_{r<s} |x_r - x_s|}.$$

Prove that the minimum values of E_n are 4 when $n = 3$, and 256 when $n = 4$.

L. J. MORDELL (Cambridge [England]).

Lösung: Wir dürfen $x_1 \geqq x_2 \geqq x_3 \geqq x_4$ voraussetzen.

1. Um das Minimum von $E_3(x_1, x_2, x_3)$ zu bestimmen, zeigen wir zunächst, daß $E_3(x_1 - x_2,\ 0,\ x_3 - x_2) \leqq E_3(x_1, x_2, x_3)$. Der Nenner bleibt offensichtlich unverändert, und für den Zähler erhält man

$$(|x_1 - x_2| + |x_3 - x_2|)^3 = (x_1 - x_3)^3 \leqq (|x_1| + |x_3|)^3 < (|x_1| + |x_2| + |x_3|)^3,$$

wenn $x_2 \neq 0$. Soll E_3 nicht mehr verkleinert werden können, so muß also $x_2 = 0$ sein und damit $x_1 > 0$, $x_3 < 0$. Hieraus folgt

$$E_3 = \frac{(|x_1| + |x_3|)^3}{x_1(-x_3)(x_1 - x_3)} = \frac{(x_1 - x_3)^3}{x_1(-x_3)(x_1 - x_3)} = \frac{(x_1 - x_3)^2}{x_1(-x_3)} = \frac{(x_1 + x_3)^2}{x_1(-x_3)} + 4 \geqq 0.$$

Der minimale Wert von E_3 ist also 4.