

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Band:** 5 (1950)  
**Heft:** 6

**Artikel:** Polygone mit maximalem Flächeninhalt  
**Autor:** Waerden, B.L. van der  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-14913>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts  
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer*

El. Math.

Band V

Nr. 6

Seiten 121–144

Basel, 15. November 1950

## Polygone mit maximalem Flächeninhalt

In seinem berühmten Werk über isoperimetrische Figuren hat der griechische Mathematiker ZENODOROS bewiesen, daß unter allen Polygonen mit gegebenem Umfang und gegebener Seitenzahl das reguläre  $n$ -Eck den größten Flächeninhalt besitzt<sup>1)</sup>.

Wie steht es nun, wenn nicht nur der Umfang gegeben ist, sondern alle Seiten feste Längen haben?

Das größte Parallelogramm mit gegebenen Seiten  $a$  und  $b$  ist offenbar das Rechteck. Für Polygone mit gerader Seitenzahl, die eine Symmetrielinie haben, hat schon STEINER bewiesen, daß sie bei gegebenen Seiten dann am größten sind, wenn sie sich einem Kreis einbeschreiben lassen.

Diese Erwägungen bringen uns auf die folgende Vermutung:

*Unter allen  $n$ -Ecken mit gegebenen Seiten hat dasjenige den größten Flächeninhalt, das sich einem Kreise einbeschreiben läßt.*

Diese Vermutung soll hier bewiesen werden.

Fangen wir mit dem Viereck an! Die gegebenen Seiten seien  $a, b, c, d$ . Die Diagonale, die  $a$  und  $b$  unterspannt, sei  $x$ . Der Flächeninhalt  $F$  ist entweder die Summe oder die Differenz der Flächeninhalte der Dreiecke mit den Seiten  $a, b, x$  und  $c, d, x$ . Wollen wir das Maximum haben, so müssen wir die Summe nehmen. Nach einer berühmten Formel von ARCHIMEDES, die gewöhnlich nach HERON benannt wird, ist also

$$4F = \sqrt{(a+b+x)(a+b-x)(a-b+x)(-a+b+x)} \\ + \sqrt{(c+d+x)(c+d-x)(c-d+x)(-c+d+x)}.$$

Der kleinste Wert, den  $x$  annehmen kann, ist  $a-b$  oder  $c-d$ , je nachdem, welche von beiden Differenzen größer ist. Nehmen wir etwa an, es sei  $a-b$ . In der Nähe dieses kleinsten Wertes nimmt  $F$  sehr schnell zu, da in dem ersten Term von  $F$  der Faktor  $\sqrt{-a+b+x}$  steckt, der bei  $x = a-b$  unendlich steil ansteigt. Ebenso fällt beim größten Wert  $x = a+b$  oder  $c+d$  die Funktion  $F$  unendlich steil ab.

In dem Intervall zwischen dem kleinsten und dem größten Wert von  $x$  ist  $F$  eine stetige Funktion von  $x$ . Eine solche stetige Funktion hat entweder in dem Intervall

<sup>1)</sup> Das Werk des ZENODOROS ist uns bekannt aus Auszügen bei THEON von Alexandrien und PAPPUS. Siehe TH. HEATH, *A History of Greek Mathematics*, Bd. 2, S. 207, oder mein neues Buch über ägyptische, babylonische und griechische Mathematik: *Ontakende Wetenschap* (P. Noordhoff, Groningen 1950).

oder an einem der Enden ein Maximum. Am Ende liegt das Maximum sicher nicht, wie wir gesehen haben, da die Funktion dort unendlich steil zunimmt bzw. abnimmt. Also muß das Maximum irgendwo zwischen dem kleinsten und dem größten Wert von  $x$  angenommen werden (Fig. 1). Dann aber muß die Ableitung der Funktion dort Null werden:

$$\frac{dF}{dx} = 0. \quad (1)$$

Wir könnten nun direkt aufs Ziel losstürmen und die Differentiation wirklich ausführen. Dann würden wir aber eine komplizierte Gleichung für  $x$  erhalten, von der wir nur mit Mühe den Weg zurück zu den geometrischen Eigenschaften des Vierecks finden könnten.

Es empfiehlt sich daher, außer  $F$  noch zwei andere Funktionen einzuführen, die eine wichtige geometrische Bedeutung im Viereck haben, nämlich den Winkel  $\varphi$

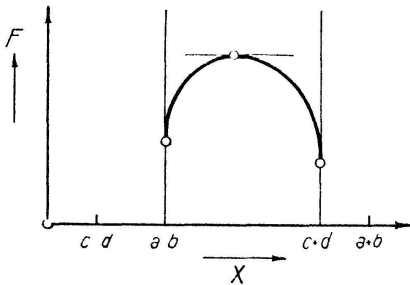


Fig. 1

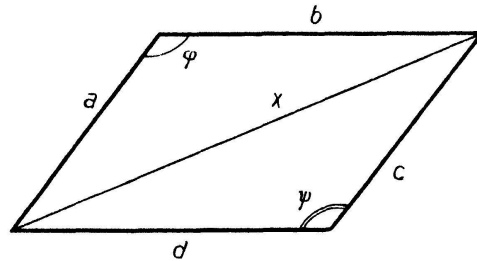


Fig. 2

zwischen  $a$  und  $b$  und den Winkel  $\psi$  zwischen  $c$  und  $d$  (Fig. 2). Nach der Kosinusregel ist

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi = c^2 + d^2 - 2cd \cos \psi. \quad (2)$$

Dadurch sind  $\varphi$  und  $\psi$  als Funktionen von  $x$  festgelegt.

Weiter ist:

$$2F = ab \sin \varphi + cd \sin \psi. \quad (3)$$

Differenzieren wir (2) und (3) nach  $x$ , so erhalten wir wegen (1):

$$2ab \sin \varphi d\varphi = 2cd \sin \psi d\psi,$$

$$ab \cos \varphi d\varphi = -cd \cos \psi d\psi.$$

Division dieser beiden Gleichungen ergibt sofort

$$\operatorname{tg} \varphi = -\operatorname{tg} \psi,$$

also, da  $\varphi$  und  $\psi$  beide zwischen  $0$  und  $180^\circ$  liegen,

$$\varphi = 180^\circ - \psi \quad \text{oder} \quad \varphi + \psi = 180^\circ. \quad (4)$$

(4) besagt aber genau, daß das Viereck ein Sehnenviereck ist.

Für das  $n$ -Eck geht die Überlegung genau so. Ziehen wir durch eine Ecke die Diagonalen  $x, y, \dots$  (Fig. 3), so erhalten wir  $n - 2$  Dreiecke mit Seiten  $a, b, x$ ;

$x, c, y; \dots$  und der Flächeninhalt  $F$  ist die Summe der Flächeninhalte dieser Dreiecke, wobei einige auch das Minuszeichen haben dürfen. Es ist aber klar, daß bei gegebenen  $x, y, \dots$  die Fläche am größten ist, wenn alle Terme das Pluszeichen haben.  $F$  ist demnach eine Summe von Quadratwurzeln, also eine stetige Funktion von  $x, y, \dots$  in einem abgeschlossenen Bereich, der durch Ungleichungen wie

$$a + b \geq x, \quad x + y \geq c, \quad \text{usw.}$$

definiert wird. Eine solche Funktion hat immer ein Maximum.

Gehen wir nun vom Maximum aus und variieren  $x$  allein, so folgt nach dem schon bewiesenen Satz für das Viereck, daß die vier Ecken  $A, B, C, D$  auf einem Kreise liegen. Ebenso liegen  $B, C, D, E$  auf einem Kreise. Die beiden Kreise fallen zusammen, da sie drei Punkte  $A, C, D$  gemeinsam haben. Also liegen  $A, B, C, D, E$  auf einem Kreis.

So weiterschließend sieht man, daß beim Maximum alle Ecken auf einem Kreis liegen müssen. Damit ist unser Satz bewiesen.

Es gibt noch eine andere Beweismethode, die weniger elementar ist, aber bei der noch etwas mehr herauskommt, nämlich daß es bei gegebenen Seiten  $a, b, \dots$  nur ein Kreissehnenpolygon und daher auch nur ein Maximum des Flächeninhaltes geben kann.

Wir gehen aus von der isoperimetrischen Eigenschaft des Kreises, die HERMANN AMANDUS SCHWARZ 1884 bewiesen hat<sup>1)</sup>. Sie besagt, daß unter allen ebenen Gebieten gleichen Umfangs der Kreis den größten Flächeninhalt hat.

Wir zeigen zunächst, daß es bei gegebenen Seiten  $a, b, \dots$  wenigstens ein Kreissehnenpolygon gibt, sofern nicht eine Seite größer oder gleich der Summe aller übrigen ist.

Es sei  $a$  die größte Seite. Wir beschreiben über  $a$  als Durchmesser einen Kreis und tragen darin, von einem Ende des Durchmessers  $AB$  ausgehend, der Reihe nach alle übrigen Seiten als Sehnen  $BC = b, CD = d, \dots$  ab. Es gibt nun drei Möglichkeiten:

*Fall 1.* Die Summe der Bogen  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , die zu den Sehnen  $a, b, c, \dots$  gehören, ist größer als  $360^\circ$ . Dann macht man den Radius des Kreises immer größer, wodurch die Bogen  $\alpha, \beta, \dots$  immer kleiner werden (in Graden ausgedrückt), bis ihre Summe genau  $360^\circ$  geworden ist. Da die Summe sich mit wachsendem  $r$  stetig ändert und für  $r \rightarrow \infty$  gegen Null strebt, so muß es einen Augenblick geben, wo sie genau  $360^\circ$  beträgt. In diesem Augenblick schließt sich das Sehnenpolygon (Figur 4).

*Fall 2.* Die Summe der Bogen  $\alpha, \beta, \dots$  ist sofort gleich  $360^\circ$ . Dann haben wir das Sehnenpolygon schon vor uns.

*Fall 3.* Die Summe der Bogen  $\alpha, \beta, \dots$  ist kleiner als  $360^\circ$ . Da  $\alpha = 180^\circ$  ist, kann man dann schreiben

$$\beta + \gamma + \dots < 360^\circ - \alpha = \alpha.$$

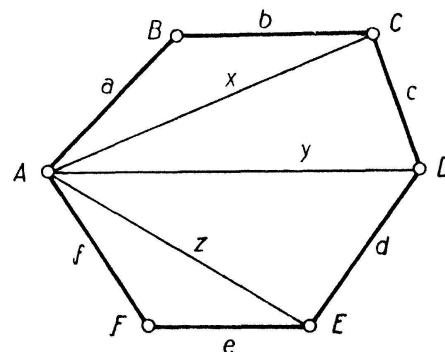


Fig. 3

<sup>1)</sup> Für neuere Beweise und Literatur siehe BONNESEN und FENCHEL, *Konvexe Körper*, Erg. Math. 3, H. 1 (Berlin 1934).

In diesem Fall tragen wir die Bogen  $\beta, \gamma, \dots$  nicht in der Verlängerung des Bogens  $\alpha$ , sondern auf dem Bogen  $\alpha$  selbst ab. Lassen wir nun den Kreis wachsen, so ändert sich die Differenz  $\alpha - (\beta + \gamma + \dots)$  stetig. Anfangs ist die Differenz positiv, aber einmal wird sie negativ. Denn wenn der Kreis riesig groß geworden ist, sind die Bogen

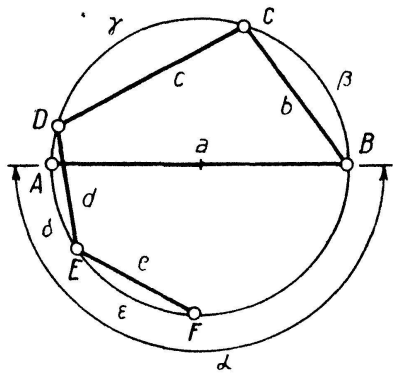


Fig. 4

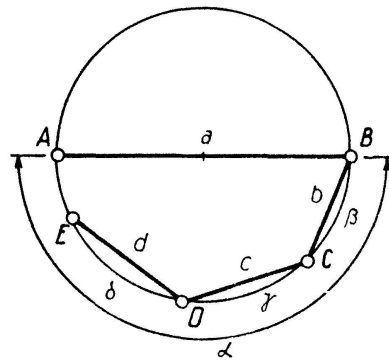


Fig. 5

nahezu gleich lang wie die Sehnen, und für die Sehnen  $a, b, \dots$  gilt nach Voraussetzung die Ungleichung

$$a < b + c + \dots$$

Für genügend großen Radius gilt dieselbe Ungleichung auch für die Bogen

$$\alpha < \beta + \gamma + \dots,$$

d.h. die Differenz  $\alpha - (\beta + \gamma + \dots)$  wird schließlich negativ.

Also gibt es einen Augenblick, wo die Differenz Null wird. In diesem Augenblick schließt sich das Sehnenpolygon.

Nun sei  $ABCDE$  das eben konstruierte Sehnenpolygon und  $A'B'C'D'E'$  irgendein anderes Polygon mit denselben Seiten, ob Sehnenpolygon oder nicht. Wir wollen

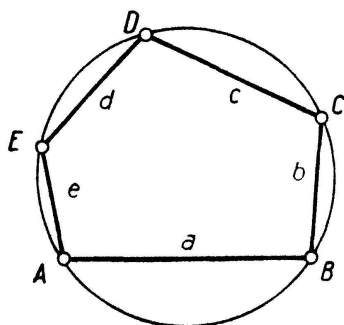


Fig. 6

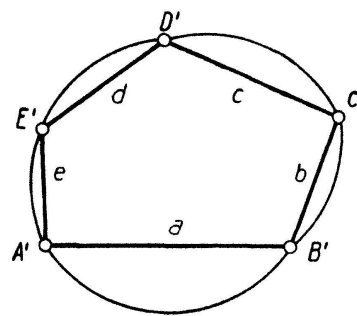


Fig. 7

beweisen, daß das erstere Polygon einen größeren oder gleichen Flächeninhalt hat wie das zweite und daß Gleichheit nur dann bestehen kann, wenn beide kongruent sind.

Im ersten Kreis stehen auf allen Seiten  $a, b, c, d, e$  Kreissegmente. Dazu kongruente Kreissegmente können wir aber auch auf die Seiten  $a, b, c, d, e$  des zweiten Polygons

aufsetzen. So erhalten wir eine von Kreisbogen begrenzte Figur, die genau den gleichen Umfang hat wie der Kreis der ersten Figur. Also muß ihr Flächeninhalt kleiner oder gleich dem des Kreises sein, wegen der isoperimetrischen Eigenschaft des Kreises. Das Gleichheitszeichen kann nur dann gelten, wenn die zweite Figur auch ein Kreis, kongruent dem ersten Kreis ist; dann aber sind auch die Polygone kongruent. In allen anderen Fällen ist die zweite Figur kleiner als die erste.

Zieht man nun beiderseits die kongruenten Kreissegmente wieder ab, so folgt, daß auch das zweite Polygon einen kleineren Flächeninhalt hat als das erste, außer in dem einen Fall, wo die beiden kongruent sind. Damit ist die Maximaleigenschaft des Sehnenpolygons erneut bewiesen.

Wäre das zweite Polygon auch ein Kreissehnenpolygon, aber nicht kongruent dem ersten, so hätte einerseits das zweite Polygon einen kleineren Flächeninhalt als das erste, andererseits aber, da man im Beweis die Rollen der beiden Kreissehnenpolygone vertauschen kann, das erste einen kleineren Flächeninhalt als das zweite. Das widerspricht sich. Also kann es nur ein Kreissehnenpolygon mit gegebenen Seiten  $a, b, \dots$  geben.

B. L. VAN DER WAERDEN.

## Résolution des équations algébriques par la règle à calcul

Quand on opère avec une règle à calcul, on gagne en rapidité et, souvent, en exactitude à résoudre les équations algébriques par approximations successives. Dans le cadre restreint de cet article, nous nous limiterons au 2<sup>e</sup> et au 3<sup>e</sup> degré. Nous devons quelque peu sacrifier les considérations théoriques à l'exposé des résultats pratiques.

### Équation du deuxième degré

Soit l'équation

$$x^2 + px + q = 0.$$

On l'écrit sous la forme

$$x = \frac{-q}{p+x}. \quad (1)$$

On donne à  $x$  dans le deuxième membre une valeur quelconque  $x_0$  (de préférence  $x_0 = 0$ ) et on tire

$$x_1 = \frac{-q}{p+x_0}.$$

On substitue ensuite dans le deuxième membre de l'équation (1) cette valeur  $x_1$  qu'on vient de calculer; on en tire

$$x_2 = \frac{-q}{p+x_1}, \quad \text{etc.}$$

On peut démontrer que la suite  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  est convergente. Elle converge vers la plus petite, en valeur absolue, des racines de l'équation, par valeurs constamment supérieures ou constamment inférieures si  $q > 0$ , et par oscillations si  $q < 0$ .