Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 5 (1950)

Heft: 2

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Kleine Mitteilungen

I. *Eine Eigenschaft des schiefwinkligen Dreiecks und die daraus folgende Eigenschaft des rechtwinkligen Dreiecks*

a) *Eigenschaft des schiefwinkligen Dreiecks*

1. Fall: Spitzwinkliges Dreieck (Fig. 1).

Die Höhen eines *spitzwinkligen* Dreiecks seien h', h'', h'''. Verbindet man ihre Fußpunkte A_1, B_1, C_1, so entstehen vier Dreiecke $A_1B_1C_1$, AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1.

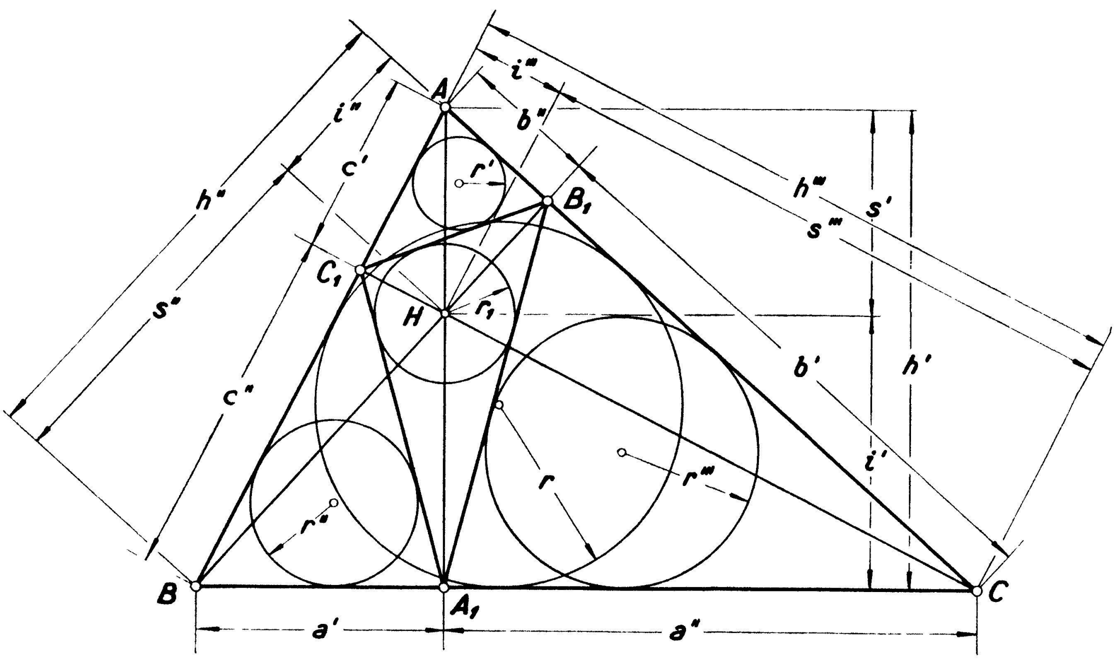

Fig. 1

Lehrsatz. — Verbindet man die Höhenfußpunkte eines spitzwinkligen Dreiecks, so ist die Summe der Höhen des ursprünglichen Dreiecks gleich der Summe aus dem Durchmesser des umgeschriebenen Kreises, dem dreifachen Radius des eingeschriebenen Kreises und den Radien der in den übrigen vier Dreiecken eingeschriebenen Kreise:

$$\underline{h' + h'' + h''' = 2R + 3r + r_1 + r' + r'' + r'''.} \tag{I}$$

2. Fall: Stumpfwinkliges Dreieck (Fig. 2).

Für ein stumpfwinkliges Dreieck ABC, in welchem $\gamma > 90°$ ist, gilt die Beziehung:

$$\underline{h' + h'' + h''' = 2R + 3r - r_1' + r' + r'' - r'''.} \tag{II}$$

Dabei ist r_1' der *Ankreisradius* des Höhenfußpunktdreiecks $A_1B_1C_1$, der die Seite A_1B_1 ($\dots c_1$) berührt, während r_1 in (I) den Radius des in diesem Dreieck eingeschriebenen Kreises bezeichnet; r''' bezieht sich auf das Dreieck CA_1B_1, das den stumpfen Winkel γ enthält.

Den Satz für das *spitzwinklige* Dreieck entsprechend der Formel (I) habe ich früher bewiesen[1]).

[1]) A. Streit, *Sur les hauteurs d'un triangle,* Enseign. math. *25* (1926).

Beweis des 2. Falls.

Obere Höhenabschnitte: $AH = s'$, $BH = s''$, $CH = s'''$;
untere Höhenabschnitte: $HA_1 = i'$, $HB_1 = i''$, $HC_1 = i'''$.

$$h' + h'' + h''' = (s' + s'' - s''') + (i''' - i' - i''). \tag{1}$$

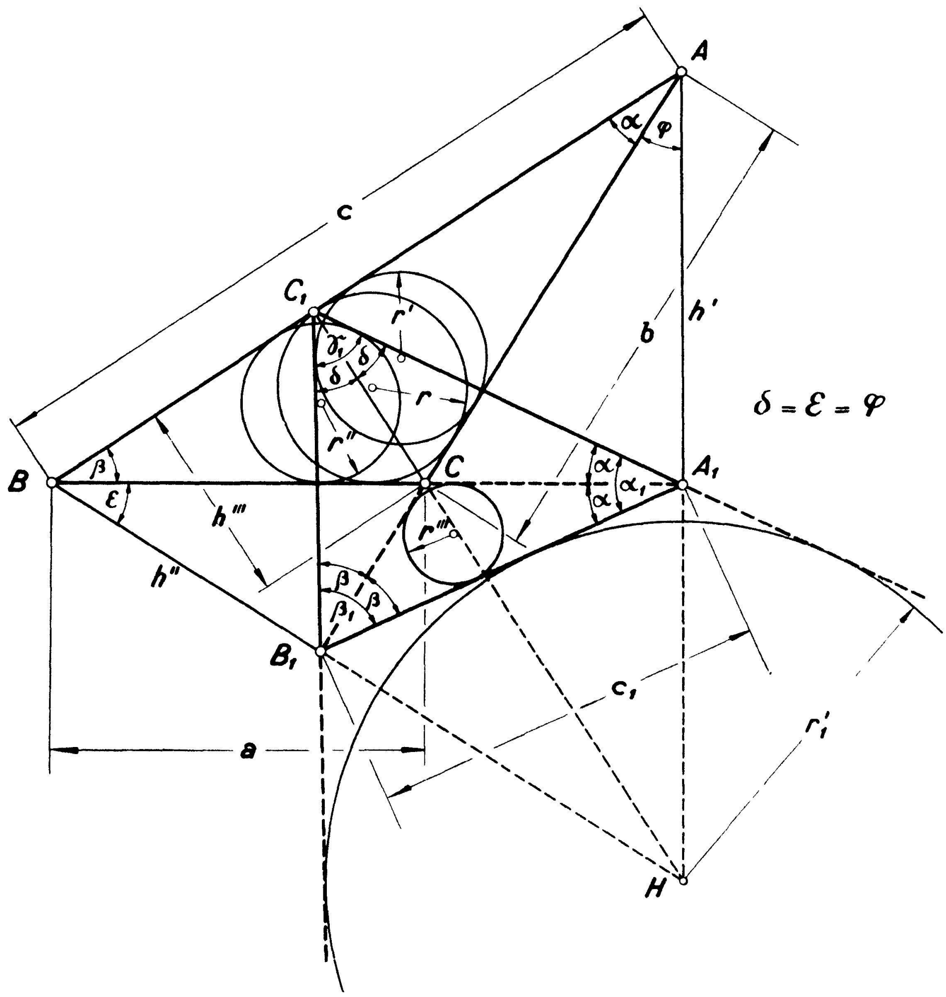

Fig. 2

Obere Höhenabschnitte:

$$s' = AH = \frac{AB_1}{\sin(180 - \gamma)} = \frac{c\cos\alpha}{\sin\gamma} = 2R\cos\alpha, \qquad \delta = \varepsilon = \varphi \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} s' &= 2R\cos\alpha \\ s'' &= 2R\cos\beta \\ s''' &= -2R\cos\gamma \end{aligned} \right. ,$$

$$s' + s'' - s''' = 2R(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma), \tag{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + 1, \tag{3}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{4R}. \tag{4}$$

Somit:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{r+R}{R}. \tag{5}$$

In (2) eingesetzt:

$$\underline{s' + s'' - s''' = 2\,(r + R).} \tag{2'}$$

Untere Höhenabschnitte:

$$\begin{cases} i' = s''\cos(180 - \gamma) = -2\,R\cos\beta\cos\gamma \\ i'' = -2\,R\cos\alpha\cos\gamma \\ i''' = 2\,R\cos\alpha\cos\beta \end{cases}$$

$$i''' - i' - i'' = 2\,R\,(\cos\alpha\cos\beta + \cos\beta\cos\gamma + \cos\gamma\cos\alpha). \tag{6}$$

(5) quadriert:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\,(\cos\alpha\cos\beta + \cos\beta\cos\gamma + \cos\gamma\cos\alpha) = \frac{r^2 + 2\,r\,R + R^2}{R^2}. \tag{7}$$

Kosinusbeziehung:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1. \tag{8}$$

Aber

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = -\frac{r_1'}{2\,R}, \tag{9}$$

denn:

$$r_1' = i'\sin(90 - \alpha) = -2\,R\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

In (8) eingesetzt:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{R + r_1'}{R}. \tag{8'}$$

In (7) eingesetzt:

$$2\,(\cos\alpha\cos\beta + \cos\beta\cos\gamma + \cos\gamma\cos\alpha) = \frac{r^2 + 2\,r\,R - r_1'R}{R^2}. \tag{7'}$$

In (6) eingesetzt:

$$i''' - i' - i'' = \frac{r^2 + 2\,r\,R - r_1'R}{R} = r - r_1' + \left(r + \frac{r^2}{R}\right). \tag{6'}$$

Der Klammerausdruck läßt sich durch die Radien r', r'', r''' der in den Dreiecken AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 eingeschriebenen Kreise ausdrücken:

$$\triangle\,AB_1C_1 \sim \triangle\,ABC, \quad r' : r = AB_1 : c = \cos\alpha.$$

Entsprechend ist

$$\begin{cases} r' = r\cos\alpha \\ r'' = r\cos\beta \\ r''' = -r\cos\gamma \end{cases}$$

und

$$r' + r'' - r''' = r\,(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)$$

oder, nach (5):

$$r' + r'' - r''' = \left(r + \frac{r^2}{R}\right). \tag{10}$$

In (6') eingesetzt:

$$\underline{i''' - i' - i'' = r - r_1' + r' + r'' - r'''.} \tag{6''}$$

Den Beziehungen (2') und (6'') zufolge geht die Gleichung (1) über in:

$$\underline{h' + h'' + h''' = 2\,R + 3\,r - r_1' + r' + r'' - r'''.} \tag{II}$$

b) *Eigenschaft des rechtwinkligen Dreiecks*

Es sei $\alpha = 90°$ (Fig. 3); dann ist:

$$h'' = c,\; h''' = b,\; r_1 = 0,\; r' = 0,\; 2\,R = a.$$

In (I) eingesetzt:

$$h' + b + c = a + 3\,r + r'' + r''',$$

oder

$$h + b + c = a + 2\,r + r + r'' + r'''.$$

Aber

$$b + c = a + 2\,r \text{ (Beweis unten).}$$

Somit:

$$\underline{h = r + r'' + r'''}. \tag{III}$$

d. h.:

Lehrsatz. – Die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Summe der Radien der in den drei Dreiecken eingeschriebenen Kreise.

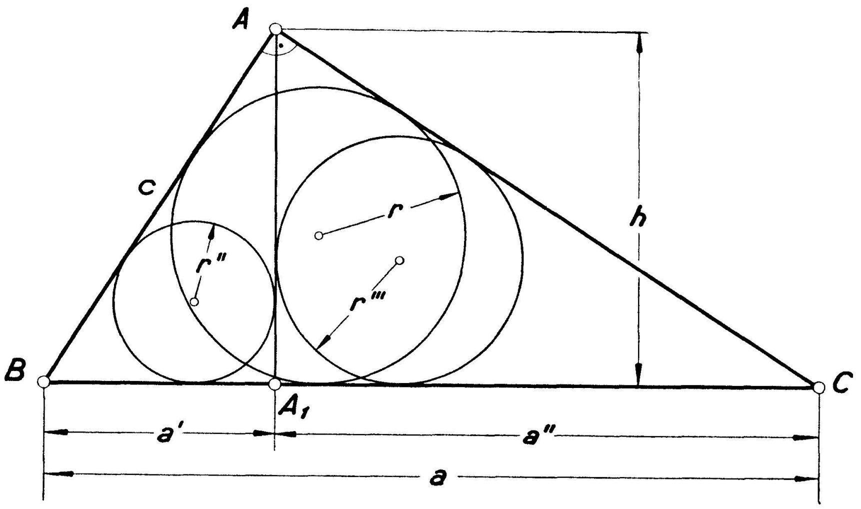

Fig. 3

Direkter Beweis

1. Verfahren.

Für ein beliebiges Dreieck gilt:

$$r = (s - a)\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}, \quad \text{für } \alpha = 90^\circ: \quad r = s - a = \frac{-a + b + c}{2},$$

$$\underline{b + c = a + 2\,r},$$

d. h.: *Die Summe der Katheten ist gleich der Summe aus der Hypotenuse und dem Durchmesser des eingeschriebenen Kreises.*

Auf die drei Dreiecke angewandt:

$$\triangle\, ABC: \quad b + c = a + 2\,r,$$

$$\triangle\, ABA_1: \quad h + a' = c + 2\,r'',$$

$$\triangle\, ACA_1: \quad h + a'' = b + 2\,r'''.$$

Addiert und vereinfacht:

$$\underline{h = r + r'' + r'''}.$$

2. Verfahren.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke:

$$\begin{array}{ll} \triangle\, ABA_1 \sim \triangle\, ABC: \quad \dfrac{r''}{r} = \dfrac{c}{a}, & \left\{ \begin{array}{l} r'' = r\,\dfrac{c}{a}, \\[2ex] r''' = r\,\dfrac{b}{a}, \\[2ex] r = r. \end{array} \right. \\[2ex] \triangle\, ACA_1 \sim \triangle\, ABC: \quad \dfrac{r'''}{r} = \dfrac{b}{a}, & \end{array}$$

Addiert:

$$r + r'' + r''' = r\,\frac{a+b+c}{a} = \frac{2\,s\,r}{a}, \qquad r + r'' + r''' = \frac{2\,F}{a} = h,$$

$$\underline{h = r + r'' + r'''.}$$

A. STREIT, Bern.

II. *Une propriété caractéristique des nombres premiers*

On connaît quelques propriétés des nombres premiers qui leur sont caractéristiques. Par exemple la suivante: tout nombre premier est d'une seule manière la différence de deux carrés.

Dans ce qui suit, je présente une propriété des nombres premiers qui est aussi caractéristique.

Considérons un nombre non-premier n. Il a au moins deux facteurs différents de un. On a donc

$$n = (1 + \alpha)\,(1 + \beta) = 1 + \alpha + \beta + \alpha\,\beta$$

c'est-à-dire on peut toujours trouver quatre entiers positifs a, b, c, d de sorte que

$$n = a + b + c + d \tag{1}$$

et

$$a\,d = b\,c. \tag{2}$$

Cette représentation est impossible pour un nombre premier p.

En effet, de (1) et (2) on déduit

$$b\,p = a\,b + b^2 + a\,d + b\,d = (a + b)\,(b + d)\,.$$

Les deux facteurs du second membre ne sont pas divisible par p, car $b + d < p$ et $a + b < p$, tandis que le premier membre est un multiple de p.

D. POMPEIU (Bucarest, Roumanie).

III. *Elementar-planimetrischer Beweis des Satzes von Brianchon und seine Dualisierung*

Der folgende Beweis des Satzes von BRIANCHON ist eine planimetrische Umdeutung eines bekannten stereometrischen Beweises, der auf DANDELIN zurückgeht. (In einem räumlichen Sechseck, dessen Seiten einem einschaligen Rotationshyperboloid angehören, gehen die drei Hauptdiagonalen durch den gemeinsamen Punkt der drei Ebenen, die durch je zwei Gegenseiten bestimmt sind. Die Normalprojektion auf die Ebene des Kehlkreises liefert den Satz für das Tangentensechseck.)

Es sei s_{14} die Berührungssehne für das Tangentenpaar t_1, t_4. Analoge Bedeutung haben s_{25} und s_{36}. Projiziert man einen beliebigen Punkt P der Ebene in der Richtung s_{14} auf t_1 (oder t_4), so werde der Abstand dieser Projektion vom Berührungspunkt der Tangente mit x_1 (bzw. $x_4 = x_1$) bezeichnet (Fig. 1). Entsprechende Bedeutung haben die Benennungen $x_2 = x_5$, $x_3 = x_6$. Eine bestimmte Orientierung des Kreises induziert auch eine Orientierung der Tangenten t_i. Wir rechnen x_i für ungerades i positiv im Sinn der orientierten Geraden t_i, für gerades i dagegen im Gegensinn von t_i.

Man erkennt nun sofort, daß der geometrische Ort des Punktes P, für den $x_1 = x_2$ (also auch $x_4 = x_5$) gilt, eine Gerade ist, die durch die drei Schnittpunkte (t_1, t_2), (s_{14}, s_{25}), (t_4, t_5) geht, d. h. eine Hauptdiagonale des Tangentensechsecks. Entsprechendes gilt für die Örter $x_2 = x_3$ und $x_3 = x_1$. Da die letzte Gleichung eine Folge der beiden andern ist, gehen die drei Diagonalen durch einen Punkt. (In dem eingangs erwähnten stereometrischen Beweis entsprechen den x_1, x_2, x_3, abgesehen von einem gemeinsamen konstanten Faktor, die Koten dreier Deckpunkte mit der gemeinsamen Projektion P, die in den dort erwähnten Ebenen mit den Spuren s_{14}, s_{25} und s_{36} liegen.)

Obwohl für den Pascalschen Satz, im Gegensatz zu dem von BRIANCHON, reichlich viele elementare Beweise bekannt sind, mag es nicht ohne Reiz sein, den dualen Satz mit den gleichen elementarsten Mitteln auch auf dualem Wege zu beweisen. Allerdings wird dabei die Einfachheit anderer Beweise, etwa desjenigen von PETERSEN[1]), nicht erreicht. Dagegen erweist sich der in dieser dualen Weise erhaltene Beweis als nahe

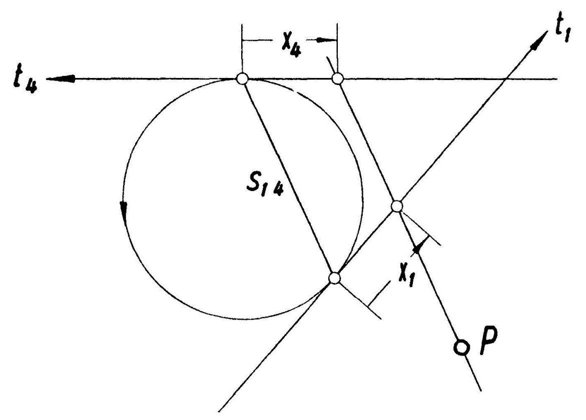

Fig. 1

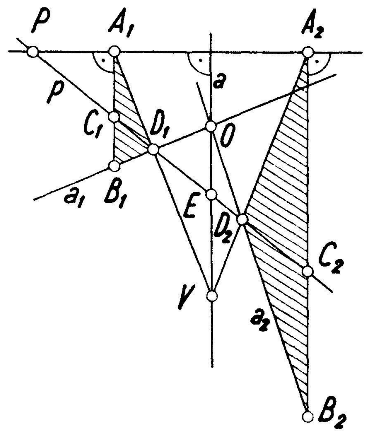

Fig. 2

verwandt mit demjenigen, bei welchem sich die Pascalsche Gerade als eine Ähnlichkeitsachse der drei Kreise ergibt, die den Umkreis des Sechsecks in je zwei gegenüberliegenden Ecken orthogonal schneiden (DURRANDE).

Vorausgeschickt sei der folgende *Hilfssatz:* Schneiden sich zwei Gerade a_1, a_2 auf der Symmetrieachse a des Punktpaares A_1A_2 und verbindet man einen veränderlichen Punkt V jener Symmetrieachse mit A_1 und A_2, dann dreht sich die Verbindungsgerade p der beiden Schnittpunkte $D_1 = (VA_1, a_1)$ und $D_2 = (VA_2, a_2)$ um einen festen Punkt P der Geraden A_1A_2 (Fig. 2).

Beweis: Die Senkrechte zu A_1A_2 in A_i möge a_i in B_i und p in C_i schneiden. Dann folgt der Hilfssatz aus der perspektiven Lage der Dreiecke $A_1B_1D_1$ und $A_2B_2D_2$. Will man für den Nachweis derselben den Desarguesschen Satz nicht benützen (homologe Seiten schneiden sich auf a), so ergibt er sich auch aus der folgenden Proportion, in welcher E den Schnittpunkt (a, p) bedeutet:

$$\frac{A_1B_1}{A_1C_1} = \frac{VO}{VE} = \frac{A_2B_2}{A_2C_2} .$$

$p = C_1C_2$ geht also durch den festen Schnittpunkt von A_1A_2 mit B_1B_2.

Es sei nun das Sechseck $A_1 \ldots A_6$ einem Kreis vom Mittelpunkt O einbeschrieben. Die Tangenten in A_1 und A_4 mögen sich in S_{14} schneiden. Analoge Bedeutungen haben S_{25} und S_{36}. Schneidet man eine beliebige Gerade p der Ebene mit $S_{14}O$ in U_1, so schließen die Geraden U_1A_1 und U_1A_4 mit den Tangenten in A_1 und A_4 die gleichen Winkel $u_1 = u_4$ ein. Entsprechende Bedeutungen haben die Benennungen $u_2 = u_5$, $u_3 = u_6$. Die Winkel u_i sollen von den Tangenten aus gemessen bei ungeradem i in einem bestimmten Drehsinn positiv gerechnet werden, bei geradem i im Gegensinn dazu. Sie sind so modulo π eindeutig bestimmt.

[1]) Vgl. W. LÜSSY, *Die Sätze von Pascal und Brianchon.*, El. Math. 2, H. 3, 49 (1947). - H. FLÜKIGER, *Darstellende Geometrie* (Orell Füßli Verlag, Zürich 1943), S. 157.

Soll für eine Gerade $u_1 = u_2$ (also auch $u_4 = u_5$) werden, so muß sie nach dem Hilfssatz durch einen festen Punkt von A_1A_2 gehen, und da für $S_{14}S_{25}$ $u_1 = u_2 = 0$ wird, liegt dieser auch auf der letzten Geraden. Durch den gleichen Punkt geht aber auch A_4A_5; d. h. er ist der Schnittpunkt von zwei Gegenseiten des Sechsecks. Entsprechend führt die Bedingung $u_2 = u_3$ auf ein Strahlenbüschel mit dem Zentrum (A_2A_3, A_5A_6), und die Geraden mit $u_3 = u_1$ gehen durch (A_3A_4, A_6A_1). Die letzte Bedingung ist aber eine Folge des gleichzeitigen Bestehens der beiden ersten; d. h. die drei Punkte liegen auf einer Geraden. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht (Zürich).

Aufgaben

Aufgabe 58. Auf einer Kugel vom Radius R liegt ein mit der Zirkelöffnung R um ein bekanntes sphärisches Zentrum M gezeichneter Kreis vor. Man konstruiere auf der Kugel (ohne Benützung einer Hilfsebene) mit dem Zirkel allein die Ecken eines der Kugel eingeschriebenen regulären Tetraeders. W. LÜSSY.

Lösung: 1. Durch die vier Tetraederecken werden auf der Kugel vier gleichseitige und gleichwinklige sphärische Dreiecke bestimmt. Die Winkel der Dreiecke sind 120°. Aus dem Kosinussatz errechnet man den Kosinus einer Seite zu $-1/3$ und damit die Länge der Tetraederkante auf $a = 2\sqrt{2/3}\,R$.

2. Zieht man mit irgendeinem Punkt P des eingezeichneten Kreises als sphärisches Zentrum einen zweiten Kreis durch das sphärische Zentrum M des ersten Kreises, so schneiden sich die beiden Kreise in zwei Punkten A und B. Der gegebene Kreis hat den Radius $r = (R\sqrt{3})/2$. Das ihm eingeschriebene Dreieck PAB hat zwei gleiche Seiten $\overline{PA} = \overline{PB} = R$. Für den eingeschlossenen Winkel 2α gilt $\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$. Somit ist die dritte Seite $\overline{AB} = 2R\sin\alpha = 2\sqrt{2/3}\,R = a$ gerade gleich der Länge der Tetraederkante, womit die gesuchte Zirkelöffnung gefunden ist. H. RUCH (Bottmingen).

Eine weitere Lösung sandte C. BINDSCHEDLER (Küsnacht).

Aufgabe 61. n^2 (n eine natürliche Zahl) kongruente Quadrate seien zu einem größeren Quadrat zusammengefügt. Falls n ungerade ist, sieht man sofort, daß ein durch die n^2 Quadrate hindurchgehender Weg mit folgenden Eigenschaften existiert:

1. Sein Anfangs- und Endpunkt liegen in zwei diagonal gegenüberliegenden kleinen Quadraten.
2. Er geht genau einmal durch das Innere jedes kleinen Quadrates.
3. Der Übergang von einem kleinen Quadrat zum nächsten geschieht stets in einem inneren Punkt der gemeinsamen Seite.

Man beweise, daß kein solcher Weg existiert, falls n gerade ist. W. NEF.

Lösung: Die «Weglänge» ist stets $n^2 - 1$, da der Weg in alle n^2 Felder führt, ausgenommen in das «Startfeld». Für n gerade ist also die Weglänge ungerade.

Bezeichnet man die Felder mit Doppelindizes (Zeilen/Spalten) und ist 11 das Startfeld in der Ecke, so wird ein beliebiges Diagonalfeld durch kk festgelegt. Der «kürzeste Weg» zu kk umfaßt also $k - 1$ Schritte in «horizontaler» und ebenso viele Schritte in «vertikaler» Richtung, ist also eine gerade Zahl.

Jeder «Umweg» muß hin und zurück ausgeführt werden, wobei Hin- und Rückweg gleiche Länge haben. Daraus folgt: Jeder Weg von 11 zu einem Diagonalfeld ist stets geradzahlig.

Weil es also unmöglich ist, ein in der Diagonale liegendes Zielfeld in einer ungeraden Anzahl von Schritten zu erreichen, ist die Behauptung bewiesen, da jeder Weg durch 11 geht.