Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **5 (1950)**

Heft 2

Soll für eine Gerade $u_1 = u_2$ (also auch $u_4 = u_5$) werden, so muß sie nach dem Hilfssatz durch einen festen Punkt von A_1A_2 gehen, und da für $S_{14}S_{25}$ $u_1 = u_2 = 0$ wird, liegt dieser auch auf der letzten Geraden. Durch den gleichen Punkt geht aber auch A_4A_5; d. h. er ist der Schnittpunkt von zwei Gegenseiten des Sechsecks. Entsprechend führt die Bedingung $u_2 = u_3$ auf ein Strahlenbüschel mit dem Zentrum (A_2A_3, A_5A_6), und die Geraden mit $u_3 = u_1$ gehen durch (A_3A_4, A_6A_1). Die letzte Bedingung ist aber eine Folge des gleichzeitigen Bestehens der beiden ersten; d. h. die drei Punkte liegen auf einer Geraden. C. Bindschedler, Küsnacht (Zürich).

Aufgaben

Aufgabe 58. Auf einer Kugel vom Radius R liegt ein mit der Zirkelöffnung R um ein bekanntes sphärisches Zentrum M gezeichneter Kreis vor. Man konstruiere auf der Kugel (ohne Benützung einer Hilfsebene) mit dem Zirkel allein die Ecken eines der Kugel eingeschriebenen regulären Tetraeders. W. Lüssy.

Lösung: 1. Durch die vier Tetraederecken werden auf der Kugel vier gleichseitige und gleichwinklige sphärische Dreiecke bestimmt. Die Winkel der Dreiecke sind 120°. Aus dem Kosinussatz errechnet man den Kosinus einer Seite zu $-1/3$ und damit die Länge der Tetraederkante auf $a = 2\sqrt{2/3}\,R$.

2. Zieht man mit irgendeinem Punkt P des eingezeichneten Kreises als sphärisches Zentrum einen zweiten Kreis durch das sphärische Zentrum M des ersten Kreises, so schneiden sich die beiden Kreise in zwei Punkten A und B. Der gegebene Kreis hat den Radius $r = (R\sqrt{3})/2$. Das ihm eingeschriebene Dreieck PAB hat zwei gleiche Seiten $\overline{PA} = \overline{PB} = R$. Für den eingeschlossenen Winkel 2α gilt $\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$. Somit ist die dritte Seite $\overline{AB} = 2R\sin\alpha = 2\sqrt{2/3}\,R = a$ gerade gleich der Länge der Tetraederkante, womit die gesuchte Zirkelöffnung gefunden ist. H. Ruch (Bottmingen).

Eine weitere Lösung sandte C. Bindschedler (Küsnacht).

Aufgabe 61. n^2 (n eine natürliche Zahl) kongruente Quadrate seien zu einem größeren Quadrat zusammengefügt. Falls n ungerade ist, sieht man sofort, daß ein durch die n^2 Quadrate hindurchgehender Weg mit folgenden Eigenschaften existiert:

1. Sein Anfangs- und Endpunkt liegen in zwei diagonal gegenüberliegenden kleinen Quadraten.
2. Er geht genau einmal durch das Innere jedes kleinen Quadrates.
3. Der Übergang von einem kleinen Quadrat zum nächsten geschieht stets in einem inneren Punkt der gemeinsamen Seite.

Man beweise, daß kein solcher Weg existiert, falls n gerade ist. W. Nef.

Lösung: Die «Weglänge» ist stets $n^2 - 1$, da der Weg in alle n^2 Felder führt, ausgenommen in das «Startfeld». Für n gerade ist also die Weglänge ungerade.

Bezeichnet man die Felder mit Doppelindizes (Zeilen/Spalten) und ist 11 das Startfeld in der Ecke, so wird ein beliebiges Diagonalfeld durch kk festgelegt. Der «kürzeste Weg» zu kk umfaßt also $k - 1$ Schritte in «horizontaler» und ebenso viele Schritte in «vertikaler» Richtung, ist also eine gerade Zahl.

Jeder «Umweg» muß hin und zurück ausgeführt werden, wobei Hin- und Rückweg gleiche Länge haben. Daraus folgt: Jeder Weg von 11 zu einem Diagonalfeld ist stets geradzahlig.

Weil es also unmöglich ist, ein in der Diagonale liegendes Zielfeld in einer ungeraden Anzahl von Schritten zu erreichen, ist die Behauptung bewiesen, da jeder Weg durch 11 geht.

Auf einem richtigen Schachbrett kann kein Zielfeld erreicht werden, das gleiche Farbe hat wie das Startfeld in der Ecke; denn auch die zweite, vierte usw. Parallele zur Diagonale kann immer nur durch eine gerade Anzahl Schritte erreicht werden.

W. ZULLIGER (Küsnacht).

Weitere Lösungen sandten: C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), L. DESCLOUX (Fribourg), H. FAEHNDRICH (Bern), H. LEHMANN (Bern), E. ROTHMUND (Zürich), P. WILKER (Bern).

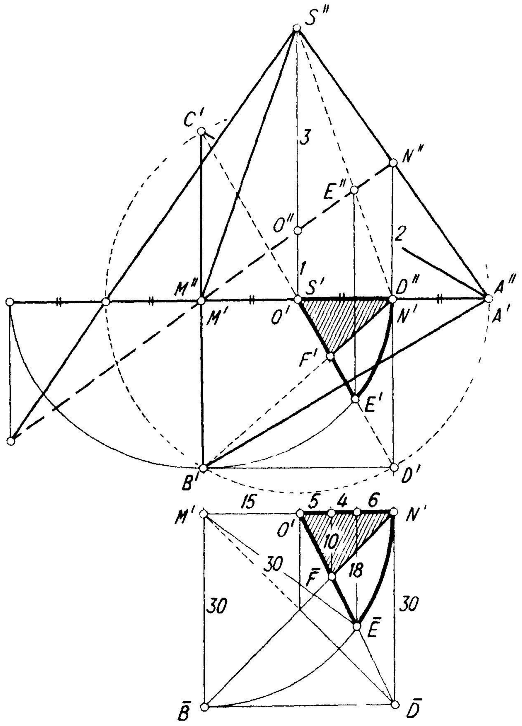
Aufgabe 62. Von einer Ellipse sind die Halbachsen a und b gegeben. Man konstruiere mit dem Zirkel allein den Krümmungsradius im Endpunkt der großen Achse. W. LÜSSY.

Lösung des Aufgabenstellers: Auf dem Hauptkreis trage man vom Endpunkt A der großen Achse aus nach beiden Seiten die Sehne b ab. Um die beiden Endpunkte schlage man Kreise vom Radius b. Die beiden Kreise schneiden sich in A und im gesuchten Krümmungszentrum.

Eine weitere Lösung sandte H. LEHMANN (Bern).

Aufgabe 63. Die vier Ecken eines regulären Tetraeders von der Kante a sind die Spitzen von vier dem Tetraeder umschriebenen Drehkegeln. Man berechne das Volumen des konvexen Körpers, der von den vier Kegeln begrenzt ist. C. BINDSCHEDLER.

Lösung: Das gemeinsame Volumen der vier Drehkegel sei K, das Tetraedervolumen T. Ich berechne das Verhältnis $K:T$. Die Figur zeigt im oberen Teil Grund- und Aufriß eines regulären Tetraeders mit Grundfläche ABC und Spitze S, des Kegels mit Spitze S



und, je zur Hälfte, der Schnitte beider mit einer Ebene normal zur Tetraederkante (und Kegelmantellinie) SA durch deren Mitte N. Der Kegelschnitt ist eine Ellipse, und man überzeugt sich leicht, daß ihr Mittelpunkt M zugleich Mitte von BC ist.

Zu jeder Tetraederkante gehört eine solche Ellipse. In ihr schneiden sich zwei Kegel, die sich längs der zugehörigen Tetraederkante berühren. Je drei Ellipsen treffen sich in einem Punkte der Mittelnormalen einer Tetraederfläche, zum Beispiel in E über ABS auf der Kegelmantellinie SD.

Der ganze Körper K läßt sich somit aufteilen in zwölf kongruente Stücke von Kegeln. Jedes derselben zerfällt in zwei symmetrische Hälften. Eine solche ist zum Beispiel der Kegel oder die Pyramide im weiteren Sinne mit der Grundfläche EON, Teil der Ellipse mit der großen Halbachse MN und mit der Höhe SN. In gleicher Weise läßt sich das Tetraeder aufteilen in 24 kongruente bzw. symmetrische Pyramiden, von denen eine die schraffierte Grundfläche FON und die Höhe SN hat.

Das Verhältnis $K:T$ ist daher gleich dem Flächenverhältnis von EON und FON. Die beiden Flächen sind im unteren Teil der Figur affin transformiert, wobei die Ellipse in ihren Hauptkreis übergeht. Die beigeschriebenen Zahlen bedeuten Längenverhältnisse der zugehörigen Strecken. Sie sind aus den Gesetzlichkeiten der Figur leicht zu erkennen. Ebenso die Zahlen im Aufriß.

Der untere Figurenteil ergibt nun: Doppelte Fläche von EON gleich

$$30^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{18}{24} - 15{,}18;$$

doppelte Fläche von FON gleich 15,10. Daher:

$$K:T = 6 \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{4} - 1{,}8 \approx 2{,}06.$$

A. STOLL (Zürich).

Das Resultat kann auch in der Form

$$K = \frac{a^2}{\sqrt{2}} \left(\arcsin \frac{3}{5} - \frac{3}{10}\right)$$

geschrieben werden, wobei für den Arcus sinus der Hauptwert zu nehmen ist.

Weitere Lösungen gingen ein von L. KIEFFER (Luxemburg) und A. SCHWARZ (Seuzach).

Nachtrag zu Aufgabe 56 (siehe Bd. V, Nr. 1, S. 18). Eine weitere Lösung wurde von JÁNOS SURANYI (Budapest, Ungarn) eingesandt, in der die maximale Anzahl $A_n^{(m)}$ der Gebiete abgeleitet wird, in die der m-dimensionale euklidische Raum durch n m-dimensionale Kugeln zerlegt wird. Es ist

$$A_n^{(m)} = 2 \sum_{i=0}^{m} \binom{n-1}{i}.$$

Aus der Lösung von H. FAEHNDRICH (a. a. O.) ergibt sich durch Induktion:

$$A_n^{(m)} = 2 \sum_{i=0}^{[m/2]} \binom{n}{m-2i}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß beide Ausdrücke übereinstimmen.

Nachtrag zu Aufgabe 57 (s. Bd. V, Nr. 1, S. 19). Eine weitere Lösung sandte A. BAGER (Hjørring, Dänemark).

Neue Aufgaben

79. Zwei Ebenen senkrecht zur Diagonale eines Würfels teilen dessen Volumen in drei gleiche Teile. Man zeige, daß diese Ebenen die Diagonale nahezu (jedoch nicht genau) im Verhältnis 17:6:17 teilen. G. PÓLYA (Stanford, USA.).

80. On construit sur les côtés d'un triangle ABC extérieurement les triangles $BA'C$, $CB'A$ et $AC'B$ semblables à ABC. Trouver la relation entre les angles du triangle ABC pour que les droites AA', BB' et CC' passent par un même point. Démontrer que cette relation ne peut être véritiée que quand ABC est un trianlge équilatéral.
H. BREMEKAMP (Delft, Hollande).

81. On considère un prisme triangulaire dont la section droite est équilatérale. Montrer qu'une section plane quelconque forme avec les faces trois angles dièdres δ_1, δ_2, δ_3 qui satisfont à la relation

$$\cos\delta_1 + \cos\delta_2 + \cos\delta_3 = 0.$$

L. DESCLOUX (Fribourg).

82. Fällt man von einem Punkt P in der Ebene eines Dreiecks Lote auf die Seiten AB, BC, CA, so entstehen die Abschnitte BA', CB' und AC'. Gibt es einen Punkt P, für den alle drei Abschnitte gleich groß sind? Welche Länge hat in diesem Fall der gleich große Abschnitt? R. LAEMMEL (Zürich).

83. Es sei

$$Z_0 = 1, \quad Z_k = 9^{Z_{k-1}} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Gesucht sind die sechs letzten Ziffern von Z_6. (Die Zahlen Z_k sind die größten Zahlen, die man mit k Ziffern schreiben kann.) H. FAEHNDRICH (Bern).

84. Démontrer que

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{27}} + \operatorname{arc\,sin} \sqrt{\frac{3}{28}} = \frac{\pi}{6}.$$

P. ROSSIER (Genève).

85. Eine Kette von der Länge L ist so aufgehängt, daß die Fläche des Segments, das durch die Verbindungsgerade der Aufhängepunkte und die Kettenlinie begrenzt wird, möglichst groß oder möglichst klein ist. Dann besteht zwischen der Sehne s, dem Durchhang f in der Mitte der Sehne und der Länge L die Beziehung

$$2f = L \sqrt[4]{\frac{L-s}{L+s}}.$$

Für das maximale Segment gilt mit sehr guter Annäherung (Fehler $<$? %)

$$f = \frac{s}{2} - \frac{L}{3}.$$

E. TROST (Zürich).

Literaturüberschau

C. F. BAESCHLIN: *Lehrbuch der Geodäsie*
Orell Füßli Verlag, Zürich 1948

Ein kurzer Hinweis auf das gegen 900 Seiten umfassende Werk geschieht an dieser Stelle aus dem folgenden Grunde: Mancher Mathematiklehrer wird in seinem Unterricht im Anschluß an die Trigonometrie sowie auch bei der konstruktiven oder analytischen Behandlung der verschiedenen Kartenentwürfe seinen Schülern gern einige Worte sagen von der Triangulierung auf dem Rotationsellipsoid, von der konformen Abbildung eines solchen auf die Kugel, von der Bestimmung des Geoids usw. Das vorliegende Werk bietet ihm eine vorzügliche Information. Die Aufgabe der Geodäsie ist die