Bemerkungen zur Stirlingschen Formel

Autor(en): **Bucher, P.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **6 (1951)**

Heft 1

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-15569

Bemerkungen zur Stirlingschen Formel

Die Moivre-Stirlingsche Formel besagt, daß die Größen

$$n! \quad \text{und} \quad P_n = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$$

prozentual um so besser übereinstimmen, je größer n ist. Diese Tatsache, die zumeist in den Lehrbüchern allein hergeleitet wird, reicht bei der Berechnung von Fakultäten, Binomialkoeffizienten oder Wahrscheinlichkeiten nicht aus, vielmehr muß bekannt sein, mit welcher Genauigkeit P_n die Größe $n!$ approximiert.

Die üblichen Fehlerabschätzungen bedienen sich der tieferliegenden Eulerschen Summenformel. CESÀRO[1]) leitet mit ganz elementaren Mitteln eine gute obere Schranke ab. Wird dieses Verfahren sinngemäß modifiziert, so erhält man auch eine sehr gute untere Schranke, die in den meisten Fällen ausreichend sein dürfte.

Die Reihenentwicklung

$$\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right), \quad |x| < 1,$$

dividieren wir durch $2x$ und setzen:

$$x = \frac{1}{2n+1},$$

wobei n eine natürliche Zahl bezeichnet, dann erhalten wir:

$$\frac{2n+1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{(2n+1)^6} + \cdots.$$

Hieraus ergeben sich die folgenden beiden Abschätzungen:

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \frac{1}{(2n+1)^6} + \cdots\right\}$$
$$= 1 + \frac{1}{12n(n+1)} = 1 + \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)},$$

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4} + \frac{1}{25/3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^6} + \cdots$$
$$= 1 + \frac{1}{3(2n+1)^2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{5/3\,(2n+1)^2}} = 1 + \frac{12}{144n^2+144n+14{,}4}$$
$$> 1 + \frac{12}{144n^2+150n+(49/16)} = 1 + \frac{1}{12n+0{,}25} - \frac{1}{12(n+1)+0{,}25},$$

dabei ist die letzte Abschätzung richtig, wenn nur

$$150n + \frac{49}{16} > 144n + 14{,}4, \quad \text{oder} \quad n > \frac{907}{480}, \quad \text{also} \quad n \geqq 2 \quad \text{ist.}$$

---

[1]) E. CESÀRO, *Einleitung in die Infinitesimalrechnung*, deutsch von G. KOWALEWSKI (Teubner, Leipzig 1922), S. 154.

Beide Abschätzungen zusammen ergeben die Ungleichungen

$$e^{1+\frac{1}{12n+0,25}-\frac{1}{12(n+1)+0,25}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12n}-\frac{1}{12(n+1)}} . \tag{I}$$

Jetzt betrachten wir die Folge positiver Zahlen

$$a_n = \frac{n!\, e^n}{n^{n+(1/2)}} .$$

Für den Quotienten zweier aufeinanderfolgender Glieder erhalten wir

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!\, e^n (n+1)^{n+(3/2)}}{n^{n+(1/2)} (n+1)!\, e^{n+1}} = e^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} .$$

Diesen Wert setzen wir in die Ungleichungen (I) ein und erhalten

$$e^{\frac{1}{12n+0,25}-\frac{1}{12(n+1)+0,25}} < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{12n}-\frac{1}{12(2n+1)}}$$

oder

$$a_{n-1}\, e^{-\frac{1}{12(n+1)+0,25}} < a_n\, e^{-\frac{1}{12n+0,25}} \tag{II}$$

und

$$a_n\, e^{-\frac{1}{12n}} < a_{n-1}\, e^{-\frac{1}{12(n+1)}} . \tag{III}$$

Die positiven Zahlen $a_n e^{-1/(12n+0,25)}$ bilden eine monoton abnehmende Folge, die demnach konvergiert. Die Zahlen $a_n e^{\;1/12n}$ sind Glieder einer monoton zunehmenden Folge, dabei ist aber

$$\lim_{n\to\infty} a_n\, e^{-\frac{1}{12n+0,25}} = \lim_{n\to\infty} a_n\, e^{-\frac{1}{12n}} = \lim_{n\to\infty} a_n = a .$$

Wir setzen als bekannt voraus, daß sich auch das Produkt von J. WALLIS mit elementaren Mitteln herleiten läßt:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}\cdot 2\sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} .$$

Setzt man hierin

$$n! = a_n\, e^{-n}\, n^{n+\frac{1}{2}},$$

so folgt

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}\, a_n^2\, n^{2n+1}\, e^{-2n}}{a_{2n}\, (2n)^{2n+(1/2)}\, e^{-2n}\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{a_{2n}\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} .$$

Für die Glieder der beiden monotonen Folgen gilt somit

$$a_n\, e^{-\frac{1}{12n}} < a = \sqrt{2\pi} < a_n\, e^{-\frac{1}{12n+0,25}}$$

oder
$$\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n+\frac{1}{12n+0{,}25}} < n! < \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n+\frac{1}{12n}} \tag{IV}$$

oder auch
$$P_n e^{\frac{1}{12n+0{,}25}} < n! < P_n e^{\frac{1}{12n}}.$$

USPENSKY[1]) leitet mit Hilfe der Eulerschen Summenformel die nach unten weniger gute Schranke $P_n e^{1/(12n+6)}$ ab.

Die gefundene Abschätzung verwenden wir, um Schranken für die Binomialkoeffizienten zu erhalten. Nach (IV) gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} > \frac{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n+\frac{1}{12n+0{,}25}}}{\sqrt{2\pi k}\, k^k e^{-k+\frac{1}{12k}} \sqrt{2\pi(n-k)}\,(n-k)^{n-k} e^{-n+k+\frac{1}{12(n-k)}}}$$

$$= \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} \left(\frac{n}{k}\right)^k \left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k} e^{\frac{1}{12n+0{,}25} - \frac{1}{12k} - \frac{1}{12(n-k)}}$$

und entsprechend

$$\binom{n}{k} < \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} \left(\frac{n}{k}\right)^k \left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k} e^{\frac{1}{12n} - \frac{1}{12k+0{,}25} - \frac{1}{12(n-k)+0{,}25}}.$$

Setzen wir

$$Q(n,k) = \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} \left(\frac{n}{k}\right)^k \left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k},$$

so erhalten wir die Abschätzung eines Binomialkoeffizienten

$$Q(n,k)\, e^{\frac{1}{12n+0{,}25} - \frac{1}{12k} - \frac{1}{12(n-k)}} < \binom{n}{k}, \tag{V}$$

$$\binom{n}{k} < Q(n,k)\, e^{\frac{1}{12n} - \frac{1}{12k+0{,}25} - \frac{1}{12(n-k)+0{,}25}}.$$

Beispiele:

1. $P_2 e^{\frac{1}{24{,}25}} = 1{,}99979 < 2! < P_2 e^{\frac{1}{24}} = 2{,}00065.$

2. $P_{10} e^{\frac{1}{120{,}25}} = 3628747{,}18 < 10! < P_{10} e^{\frac{1}{120}} = 3628810{,}05.$

3. $P_{100} e^{\frac{1}{1200{,}25}} = 9{,}3326\,1995 \cdot 10^{157} < 100! < P_{100} e^{\frac{1}{1200}} = 9{,}3326\,216 \cdot 10^{157}.$

4. $Q(6,2)\, e^{\frac{1}{72{,}25} - \frac{1}{24} - \frac{1}{48}} = 14{,}9939 < \binom{6}{2} < Q(6,2)\, e^{\frac{1}{72} - \frac{1}{24{,}25} - \frac{1}{48{,}25}} = 15{,}0027.$

[1]) J. V. USPENSKY, *Introduction to Mathematical Probability* (McGraw-Hill, New York 1937), S. 352.

5. $$Q(8000, 3500)\, e^{\frac{1}{96000,25} - \frac{1}{42000} - \frac{1}{54000}} = 9{,}5330\,0107\,169 \cdot 10^{2378} < \binom{8000}{3500},$$

$$\binom{8000}{3500} < Q(8000, 3500)\, e^{\frac{1}{96000} - \frac{1}{42000,25} - \frac{1}{54000,25}} = 9{,}5330\,0107\,412 \cdot 10^{2378}.$$

Hieraus ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, daß beim 8000maligen Werfen einer Münze gerade Schrift 3500mal erscheint

$$5{,}4861\,0771\,05 \cdot 10^{-30} < w < 5{,}4861\,0771\,19 \cdot 10^{-30}.$$

Diese Beispiele zeigen, daß die Annäherung schon bei kleinem n ausgezeichnet ist, so daß die Schranken wohl meist genügen werden. P. BUCHNER, Basel.

Construction du cercle osculateur en un point quelconque d'une quartique bicirculaire

Considérons une courbe anallagmatique générale Σ. On sait qu'elle est l'enveloppe d'un cercle C qui varie en restant orthogonal à un cercle fixe D, appelé cercle directeur, tandis que son centre décrit une courbe fixe d, appelée déférente.

Connaissant D et un point O_1 de d, on peut évidemment construire le cercle C de centre O_1, que nous appellerons C_1, et il est de plus aisé de trouver ses points de contact avec Σ.

Soit, en effet, C_2 un cercle C voisin de C_1, O_2 son centre. Soient M' et N' les points communs à C_1 et C_2. Ces cercles étant orthogonaux à D, leur axe radical $M'N'$ passe par le centre O' de D: il est, en outre, perpendiculaire à la ligne des centres O_1O_2. D'après la théorie des enveloppes, si l'on fait tendre O_2 vers O_1, les points M' et N' tendent vers les points où C touche son enveloppe, points que nous appellerons M et N. La droite O_1O_2 ayant comme position limite la tangente t à d en O_1, on voit qu'on obtiendra les points M et N à l'intersection du cercle C_1 et de la perpendiculaire f abaissée de O' sur t.

De plus, C_1 étant tangent à la courbe Σ en M et N, on connaît aussi les normales en ces points qui sont les droites O_1M et O_1N. Sur ces normales se trouvent les centres de courbure c et c' de Σ aux points M et N. Le problème de la construction de ces centres à la règle et au compas est resté jusqu'à présent irrésolu. On peut cependant le résoudre aisément si l'on sait construire le cercle osculateur en tout point de d. Les calculs développés plus loin m'ont en effet amené, dans ce cas, à la solution suivante:

On construit le centre de courbure O de la déférente d au point O_1; on détermine le pôle T de la droite f par rapport à C_1; puis le symétrique T_1 de T par rapport à O_1. On élève la perpendiculaire à t en T_1, et l'on mène par O_1 la parallèle à $O'O$. Ces deux droites se coupent en un point K. On mène enfin par O' la parallèle g à OK. La droite g coupe O_1M et O_1N aux centres de courbure c et c' cherchés.