# Construction du cercle osculateur en un point quelconque d'une quartique bicirculaire


Autor(en): **Loeffler, A.**



Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **6 (1951)**

Heft 1

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-15570



**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

5. $Q(8000, 3500)\, e^{\frac{1}{96000,25} - \frac{1}{42000} - \frac{1}{54000}} = 9,5330\,0107\,169 \cdot 10^{2378} < \binom{8000}{3500}$,

$$\binom{8000}{3500} < Q(8000, 3500)\, e^{\frac{1}{96000} - \frac{1}{42000,25} - \frac{1}{54000,25}} = 9,5330\,0107\,412 \cdot 10^{2378}.$$

Hieraus ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, daß beim 8000maligen Werfen einer Münze gerade Schrift 3500mal erscheint

$$5,4861\,0771\,05 \cdot 10^{-30} < w < 5,4861\,0771\,19 \cdot 10^{-30}.$$

Diese Beispiele zeigen, daß die Annäherung schon bei kleinem $n$ ausgezeichnet ist, so daß die Schranken wohl meist genügen werden. P. BUCHNER, Basel.

# Construction du cercle osculateur en un point quelconque d'une quartique bicirculaire

Considérons une courbe anallagmatique générale $\Sigma$. On sait qu'elle est l'enveloppe d'un cercle $C$ qui varie en restant orthogonal à un cercle fixe $D$, appelé cercle directeur, tandis que son centre décrit une courbe fixe $d$, appelée déférente.

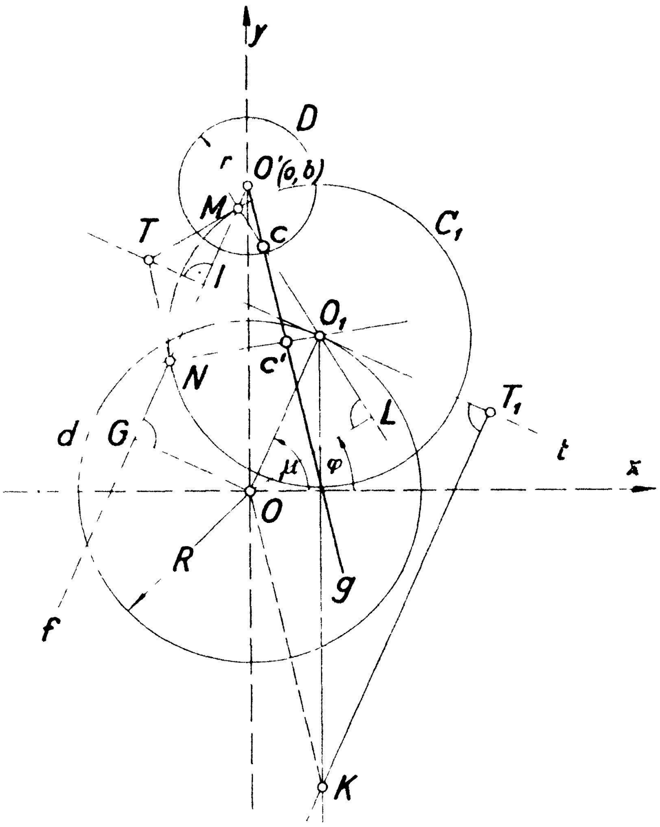
Connaissant $D$ et un point $O_1$ de $d$, on peut évidemment construire le cercle $C$ de centre $O_1$, que nous appellerons $C_1$, et il est de plus aisé de trouver ses points de contact avec $\Sigma$.

Soit, en effet, $C_2$ un cercle $C$ voisin de $C_1$, $O_2$ son centre. Soient $M'$ et $N'$ les points communs à $C_1$ et $C_2$. Ces cercles étant orthogonaux à $D$, leur axe radical $M'N'$ passe par le centre $O'$ de $D$: il est, en outre, perpendiculaire à la ligne des centres $O_1O_2$. D'après la théorie des enveloppes, si l'on fait tendre $O_2$ vers $O_1$, les points $M'$ et $N'$ tendent vers les points où $C$ touche son enveloppe, points que nous appellerons $M$ et $N$. La droite $O_1O_2$ ayant comme position limite la tangente $t$ à $d$ en $O_1$, on voit qu'on obtiendra les points $M$ et $N$ à l'intersection du cercle $C_1$ et de la perpendiculaire $f$ abaissée de $O'$ sur $t$.

De plus, $C_1$ étant tangent à la courbe $\Sigma$ en $M$ et $N$, on connaît aussi les normales en ces points qui sont les droites $O_1M$ et $O_1N$. Sur ces normales se trouvent les centres de courbure $c$ et $c'$ de $\Sigma$ aux points $M$ et $N$. Le problème de la construction de ces centres à la règle et au compas est resté jusqu'à présent irrésolu. On peut cependant le résoudre aisément si l'on sait construire le cercle osculateur en tout point de $d$. Les calculs développés plus loin m'ont en effet amené, dans ce cas, à la solution suivante:

*On construit le centre de courbure $O$ de la déférente $d$ au point $O_1$; on détermine le pôle $T$ de la droite $f$ par rapport à $C_1$; puis le symétrique $T_1$ de $T$ par rapport à $O_1$. On élève la perpendiculaire à $t$ en $T_1$, et l'on mène par $O_1$ la parallèle à $O'O$. Ces deux droites se coupent en un point $K$. On mène enfin par $O'$ la parallèle $g$ à $OK$. La droite $g$ coupe $O_1M$ et $O_1N$ aux centres de courbure $c$ et $c'$ cherchés.*

*Démonstration.* — Remarquons d'abord que $O'$, $c$ et $c'$ sont en ligne droite. En effet, si $r$ est le rayon de $D$, on sait qu'une inversion de centre $O'$ et de puissance $r^2$ transforme la quartique en elle-même. Les points $M$ et $N$ se correspondent dans cette inversion, ainsi que leurs cercles osculateurs. Il s'ensuit que les centres de ces deux cercles sont alignés sur $O'$. Montrons ensuite que les droites $O'c$ et $OK$ sont parallèles,




en calculant leurs coefficients angulaires. Examinons en premier lieu le cas où la déférente $d$ est un cercle de rayon $R$. Choisissons son centre $O$ comme origine d'un système d'axes rectangulaires dont l'axe des $y$ passe par le centre $O'(o, b)$ du cercle directeur $D$.

L'équation de $D$, dans ce système, est:

$$x^2 + y^2 - 2\,b\,y + b^2 - r^2 = 0.$$

Déterminons la position de $O_1$ sur $d$ par le paramètre

$$u = \widehat{Ox, OO_1}.$$

Les coordonnées de $O_1$ sont alors:

$$x_1 = R\cos u, \quad y_1 = R\sin u.$$

Le cercle $C_1$ de centre $O_1$ étant orthogonal à $D$, son rayon $r_1$ est donné par la relation:

$$r_1^2 = R^2 - 2\,b\,R\sin u + b^2 - r^2. \tag{1}$$

*a*) Pour calculer le coefficient angulaire de $g$, menons $OL$ perpendiculairement à $O_1M$, et soit:

$$\widehat{Ox, OL} = \varphi. \qquad (0 < \varphi < 2\pi)$$

Dans le triangle rectangle $O_1OL$, l'angle aigu $O_1OL$ vaut $|u - \varphi|$, quelle que soit la position du point $O_1$; de sorte que l'expression

$$OL = R\cos(u - \varphi)$$

est toujours positive.

L'équation de la droite $O_1M$ sous forme normale est, par suite:

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - R\cos(u - \varphi) = 0. \tag{2}$$

Les paramètres $u$ et $\varphi$ sont reliés par une relation. Pour l'établir, menons la droite $OG$ perpendiculairement à $f$. Les angles $u$ et $O'OG$ ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires, on a:

$$|OG| = |OO'\cos u| = |b\cos u|.$$

Soit $I$ le pied de $f$ sur $t$. On a:

$$\widehat{MO_1I} = \widehat{LOO_1} = |u - \varphi|.$$

Donc:
$$O_1I = O_1M\cos(u - \varphi) = r_1\cos(u - \varphi).$$

$O_1IGO$ étant un rectangle, les longueurs $O_1I$ et $OG$ sont égales, et, par suite, on a l'équation:

$$b\cos u = \pm r_1\cos(u - \varphi). \tag{3}$$

$r_1$ étant fonction de $u$ d'après (1), la relation (3) permet de considérer $u$ comme fonction de $\varphi$.

Le centre de courbure $c$ est la limite du point d'intersection de $O_1M$ et d'une autre normale à la quartique lorsque cette seconde droite tend vers la première. Donc, si $F(x, y, \varphi) = 0$ est l'équation de $O_1M$, les coordonnées $x_0$ et $y_0$ du point $c$ sont les solutions du système:

$$F = x\cos\varphi + y\sin\varphi - R\cos(u - \varphi) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi} = -x\sin\varphi + y\cos\varphi + R\sin(u - \varphi)(u' - 1) = 0.$$

On en tire:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= R(\sin\varphi\sin(u - \varphi)u' + \cos u) \\ y_0 &= R[-\cos\varphi\sin(u - \varphi)u' + \sin u] \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

$u'$ désigne la dérivée de $u$ par rapport à $\varphi$. Nous la calculerons en utilisant les relations (1) et (3).

En dérivant (1) par rapport à $u$, il vient:

$$2r_1r_1' = -2bR\cos u. \tag{5}$$

En éliminant $r_1$ entre (5) et (3), on trouve:

$$r_1' = \mp R\cos(u - \varphi).$$

D'après (3), on a: $$r_1 = \pm \frac{b \cos u}{\cos (u - \varphi)} .$$

Dérivons (3) par rapport à $\varphi$. Il vient:

$$- b \sin u \, u' = \pm r_1' \cos (u - \varphi) \, u' \mp r_1 \sin (u - \varphi) \, (u' - 1).$$

Remplaçons $r_1'$ et $r_1$ par leurs expressions en fonction de $u$ et $\varphi$ et résolvons par rapport à $u'$; on obtient finalement:

$$u' = \frac{b \cos u \sin (u - \varphi)}{R \cos^3 (u - \varphi) - b \sin \varphi} .$$

Introduisons cette valeur de $u'$ dans les formules (4). Utilisons les valeurs de $x_0$ et $y_0$ qu'on obtient ainsi pour calculer le coefficient angulaire de la droite $O'c$:

$$m = \frac{y_0 - b}{x_0} .$$

On trouve, après quelques transformations, et en tenant compte de (3):

$$m = \frac{R \sin u - (r_1^2/b \cos^2 u)}{R \cos u} = \frac{y_1}{x_1} - \frac{r_1^2 R^2}{b \, x_1^3} . \tag{6}$$

*b*) Pour trouver rapidement le coefficient angulaire $m_K$ de $OK$, bornons-nous au cas de la figure. On en tire, en désignant par $x_K \, y_K$ les coordonnées de $K$:

$$m_K = \frac{y_K}{x_K} = \frac{y_1 - KO_1}{x_1} = \frac{y_1}{x_1} - \frac{O_1 T_1}{x_1 \cos u} .$$

Or: $$O_1 T_1 = O_1 T = \frac{r_1}{\cos (u - \varphi)} = \frac{r_1^2}{b \cos u} ,$$

puisque $r_1 \cos (u - \varphi) = b \cos u$, donc:

$$m_K = \frac{y_1}{x_1} - \frac{r_1^2}{b \, x_1 \cos^2 u} = \frac{y_1}{x_1} - \frac{r_1^2 R^2}{b \, x_1^3} .$$

Ce résultat est d'ailleurs valable quelles que soient les positions des cercles de la figure, comme le montrerait un calcul fait suivant les méthodes habituelles de la géométrie analytique.

D'après la formule (6), on a:

$$m_K = m$$

et on voit que la droite $g$ est parallèle à $OK$. La construction à démontrer est donc établie dans le cas où $d$ est un cercle. Le centre de $d$ se confond alors avec le centre de courbure $O$ de $d$ au point $O$.

Supposons maintenant que l'enveloppe $\Sigma$ de $C_1$ soit une anallagmatique ayant comme déférente $d$ une courbe à courbure continue. Désignons par $O_1$ un point quelconque de $d$ et par $M$ un des deux points correspondants de $\Sigma$. $M$ admet $O_1M$ comme normale. Le centre de courbure $c$ est la limite du point d'intersection de $O_1M$ et d'une normale infiniment voisine $O_1'M'$. Supposons que, dans ce processus, on remplace le point $O_1'$, pris sur $d$, par un point $O_1''$, pris sur le cercle osculateur de $d$

en $O_1$ et dans le voisinage de ce point. Construisons aussi un point $M''$, en partant de $O_1''$, comme on construirait $M'$ en partant de $O_1'$. Si l'on remplace la droite $O_1'M'$ par $O_1''M''$, dans le passage à la limite, on peut montrer qu'on ne fait que négliger des infiniment petits d'un ordre supérieur ou égal au second par rapport à l'arc $O_1O_1''$. Il s'ensuit que la limite du point d'intersection de $O_1''M''$ et de $O_1M$ est aussi le point $c$. On peut, en résumé, remplacer $d$ par son cercle osculateur au point $O_1$ pour trouver les centres de courbure $c$ et $c'$ de $\Sigma$ à l'aide de la construction qu'on vient d'établir. Celle-ci nous permet donc de déterminer le cercle osculateur en un point quelconque $M$ d'une anallagmatique $\Sigma$ à condition qu'on sache construire celui de sa déférente $d$ au point correspondant. C'est, en particulier, le cas si $d$ est une conique quelconque et si, par suite, $\Sigma$ est une quartique bicirculaire générale.

A. LOEFFLER, Rolle.

# Kleine Mitteilungen

*Der Hyperbeltangens in der Biologie*

Manche Lehrbücher der Differential- und Integralrechnung geben als Anwendung der Exponentialfunktion und gleichzeitig als Beispiel einer einfachen Differentialgleichung das bekannte Wachstumsgesetz der Biologie

$$\frac{dN}{dt} = k\,N, \tag{1}$$

wo $N$ die Anzahl der Individuen einer isoliert genommenen Population und $k$ eine Wachstumskonstante bedeuten. Die Lösung von (1) lautet:

$$N = N_0\, e^{k t}.$$

Nach dieser Funktion würde das Wachstum immer schneller, um schließlich unbegrenzt zuzunehmen; und doch wachsen die Bäume nicht in den Himmel, einmal hört der Vermehrung auf, weil der Raum fehlt und die Nahrung ungenügend wird. Es handelt sich also darum, diesen hemmenden Faktoren im Ansatz (1) Rechnung zu tragen. Die Konstante $k$ soll deshalb aus einer Wachstumskonstanten $\varepsilon$ und einer Hemmungskonstanten $\lambda$, die ihrerseits proportional der Anzahl der Individuen ist, in folgender Weise zusammengesetzt werden:

$$k = \varepsilon - \lambda\, N.$$

Das Wachstumsgesetz nimmt damit die Form

$$\frac{dN}{dt} = (\varepsilon - \lambda\, N)\, N \tag{2}$$

an. Man kann die rechte Seite $\varepsilon N - \lambda N^2$ auch als die ersten Glieder der Taylor-Entwicklung der Wachstumsgeschwindigkeit $dN/dt$ ansehen.[1]

Die Differentialgleichung (2) ist separierbar, und durch elementare Integration mittels einer Partialbruchzerlegung erhält man die Lösung:

$$N = \frac{\varepsilon}{e^{-\varepsilon(t-t_0)} + \lambda}\,. \tag{3}$$

Daraus ersieht man sofort, daß für $t \to \infty$ $N_\infty = \varepsilon/\lambda$ wird, also ein endlicher Grenzwert existiert, der nur von den beiden Konstanten $\varepsilon$ und $\lambda$ abhängt.