Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **6 (1951)**

Heft 1

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Die Integrationskonstante t_0 soll so festgesetzt werden, daß für $t = 0$

$$N_0 = \frac{1}{2} N_\infty = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{\lambda}$$

wird. Diese Wahl des Zeitnullpunktes ist deshalb zweckmäßig, weil die Lösung dadurch die einfachste Form gewinnt. Man findet nun aus (3)

$$t_0 = \frac{\ln \lambda}{\varepsilon}$$

und damit die Lösung

$$N = N_\infty \frac{e^{\varepsilon t}}{1 + e^{\varepsilon t}} . \tag{4}$$

Dies ist die Gleichung der sogenannten logistischen Kurve von VERHULST-PEARL.

Subtrahiert man auf beiden Seiten von (4) $N_\infty/2$, so ergibt sich durch einfaches Ausrechnen:

$$N - \frac{N_\infty}{2} = \frac{N_\infty}{2} \cdot \frac{e^{\varepsilon t} - 1}{e^{\varepsilon t} + 1} = \frac{N_\infty}{2} \operatorname{tgh} \frac{\varepsilon}{2} t .$$

Es ist also:

$$\underline{N = \frac{N_\infty}{2} \left(\operatorname{tgh} \frac{\varepsilon}{2} t + 1 \right)} . \tag{5}$$

Bemerkenswert ist hier das Auftreten des Hyperbeltangens, also einer tabellarisierten Funktion. Dieser einfache Zusammenhang der logistischen Funktion mit dem Hyperbeltangens scheint den Biologen entgangen zu sein, jedenfalls ist in der einschlägigen Literatur darüber nichts zu finden. An Hand von (5) läßt sich nun der Wachstumsverlauf einer Population klar überblicken; ebenfalls lassen sich die Konstanten ε und λ leicht aus den Werten N_w und $\dot{N}_w = (dN/dt)_{t=0}$ berechnen:

$$\varepsilon = 2 \frac{\dot{N}_w}{N_w} , \quad \lambda = \frac{\dot{N}_w}{N_w^2} .$$

Die Gültigkeit des Gesetzes (5) wurde in mehreren Fällen untersucht, zum Beispiel am Wachstum einer *Drosophila*population oder an der Bevölkerung von Nordamerika. Ebenso ist es gut bestätigt für das Wachstum von Planktonkulturen.

Einer (2) analogen Differentialgleichung genügt das Gesetz der Wundheilung von ROBERTSON[1]).

Hinzugefügt sei noch, daß (2) nur dann gilt, wenn es sich um eine Population einer einzigen Art handelt. Sind mehrere Arten vorhanden, von denen etwa die eine die andere frißt, so werden die Verhältnisse wesentlich komplizierter. Von solchen Problemen handelt u. a. das lesenswerte Buch von U. D'ANCONA, *Der Kampf ums Dasein*[2]). Die mathematischen Grundlagen dieses Zweiges der theoretischen Biologie stammen von V. VOLTERRA.

E. ROTH-DESMEULES, Luzern.

Aufgaben

Aufgabe 46. In una curva razionale normale dello spazio S_n ad n dimensioni è inscritta una piramide variabile di $n+1$ vertici avente per baricentro un punto fisso B: determinare l'inviluppo delle sue facce.

A. LONGHI (Lugano).

[1]) R. FUETER, *Das mathematische Werkzeug* (Orell Füßli, Zürich 1947), S. 192.

[2]) U. D'ANCONA, *Der Kampf ums Dasein* (Borntraeger, Berlin 1939).

Solution: Soit C la courbe rationnelle normale de l'espace à n dimensions, c'est-à-dire d'ordre n. Remarquons que la solution sera facilement trouvée si l'on peut établir la propriété (a) suivante: Tout point G de l'espace est le barycentre d'un et d'un seul groupe de n points de la courbe C.

En effet, soit P_0 un point de la courbe C. Le point G tel que $\overrightarrow{P_0 B} = n \cdot \overrightarrow{BG}$ est le barycentre d'un et d'un seul groupe de points $P_0, \ldots, P_n$ qui déterminent avec P_0 le seul simplexe de sommet P_0 répondant aux conditions. Par tout point de la courbe passent donc n hyperplans tangents au lieu cherché. En appliquant soit le principe de continuité de SCHUBERT, soit la formule donnant le nombre de groupes communs à deux séries linéaires de points, on trouve que par tout point de l'espace passent n hyperplans tangents au *lieu cherché* qui *est donc une hypersurface développable normale dont l'arête de rebroussement est une nouvelle courbe normale.*

Reste à démontrer la propriété (a) qui est le cas particulier pour $k = n$ du théorème général suivant:

Le lieu des centres de gravité des groupes de k points d'une courbe normale C de l'espace à n dimensions est une variété V^k à k dimensions d'ordre $\binom{n}{k}$; tout E^{n-k} passant par j points $R_1, \ldots, R_j$ à l'infini de C coupe encore cette variété en $\binom{n-j}{k}$ points. [Donc en particulier, tout point R_i est un point de multiplicité $\binom{n-1}{k-1}$ pour V^k].

Ce théorème étant trivial pour $k = 1$, supposons-le vrai pour $k-1$: V^{k-1} est d'ordre $\binom{n}{k-1}$; tout E^{n-k+1} par j points R_i la coupe encore en $\binom{n-j}{k-1}$ points.

Combien y a-t-il de points T de V^k sur un E^{n-k} passant par j points R_i? T est le barycentre de k points $B_1, \ldots, B_k$ tels que B_1 est sur C et le barycentre D de $B_2, \ldots, B_k$ est sur V^{k-1}. A tout point T correspondent donc k points D tels que: 1° D est sur V^{k-1}, 2° $\overrightarrow{B_1 T} = (k-1)\, \overrightarrow{TD}$. Le lieu du point D défini par 2° est, si B_1 varie sur C et T varie sur E^{n-k}, une variété W d'ordre n, de dimension $(n-k+1)$ passant par les j points R_i contenus dans E^{n-k}. Le nombre des points D cherchés est donc égal au nombre des points d'intersection situés dans le fini des variétés V^{k-1} et W. Ce nombre est aussi égal au nombre des points d'intersection des variétés V' et W' obtenues en projetant V^{k-1} et W parallèlement à E^{n-k} sur un E^k quelconque.

W' est une variété de dimension 1 et d'ordre $(n-j)$ puisque W passe par j points R_i situés sur l'axe de projection; W' passe encore simplement par les $(n-j)$ points $R'_{j+1}, \ldots, R'_n$, projections des points $R_{j+1}, \ldots, R_n$. Comme tout E^{n-k+1} parallèle à E^{n-k} coupe V^{k-1} encore en $\binom{n-j}{k-1}$ points, V' est d'ordre $\binom{n-j}{k-1}$. Mais comme tout E^{n-k+1} passant par $j+1$ points R_i coupe encore V^{k-1} en $\binom{n-j-1}{k-1}$ points, W' aura en chacun des points $R'_{j+1}, \ldots, R'_n$ des points de multiplicité

$$\binom{n-j}{k-1} - \binom{n-j-1}{k-1} = \binom{n-j-1}{k-2}.$$

Dès lors, V' et W' se coupent en $(n-j)\binom{n-j}{k-1}$ points dont $(n-j)\binom{n-j-1}{k-2}$ sont à l'infini en $R'_{j+1}, \ldots, R'_n$. Il y a donc

$$(n-j)\left[\binom{n-j}{k-1} - \binom{n-j-1}{k-2}\right] = (n-j)\binom{n-j-1}{k-1}$$

points D, c'est-à-dire

$$\frac{n-j}{k}\binom{n-j-1}{k-1} = \binom{n-j}{k}$$

points T situés sur un E^{n-k} passant par j points R_i, ce qui démontre complètement le théorème.

J.-P. SYDLER (Zurich).

Aufgabe 71. La somme des carrés des n premiers nombres entiers n'est jamais un carré, sauf si $n = 24$. L. KOLLROS (Zurich).

Lösung: Es ist zu zeigen, daß die diophantische Gleichung

$$6\,m^2 = n\,(n+1)\,(2\,n+1) \tag{1}$$

außer $m = n = 1$ und $m = 70$, $n = 24$ keine ganzzahligen Lösungen hat. Die Endlichkeit der Lösungsanzahl folgt aus einem Satz von MORDELL, der aussagt, daß die Gleichung $A\,x^3 + B\,x^2 + C\,x + D = E\,y^2$ nur endlich viele ganzzahlige Lösungen besitzt[1]). Da n, $n+1$, $2\,n+1$ paarweise teilerfremd sind, haben wir folgende sechs Fälle zu unterscheiden:

1. $n = 2\,x^2$, $n+1 = 3\,y^2$, $2\,n+1 = z^2$; 4. $n = x^2$, $n+1 = 6\,y^2$, $2\,n+1 = z^2$;

2. $n = 2\,x^2$, $n+1 = y^2$, $2\,n+1 = 3\,z^2$; 5. $n = 6\,x^2$, $n+1 = y^2$, $2\,n+1 = z^2$;

3. $n = 3\,x^2$, $n+1 = 2\,y^2$, $2\,n+1 = z^2$; 6. $n = x^2$, $n+1 = 2\,y^2$, $2\,n+1 = 3\,z^2$.

x, y und z sind paarweise teilerfremde ganze Zahlen.

Im ersten Fall erhalten wir die Gleichung $4\,x^2 + 1 = z^2$, so daß $x = 0$. Im zweiten Fall ist $4\,x^2 + 1 = 3\,z^2$, somit ergibt sich wegen $x^2 \equiv 1 \pmod 3$ ein Widerspruch. Im dritten Fall stoßen wir auf die unmögliche pythagoreische Gleichung $1 + z^2 = 4\,y^2$. Der vierte Fall führt auf $x^2 + 1 = 6\,y^2$, was eine unmögliche Kongruenz mod 3 ergibt. Die Schwierigkeit des Problems liegt in den beiden letzten Fällen, die sich nicht durch einfache Kongruenzbetrachtungen erledigen lassen.

Im fünften Fall betrachten wir die Gleichung $6\,x^2 = z^2 - y^2$. Da $z - y$ und $z + y$ höchstens den gemeinsamen Faktor 2 haben, sind nur folgende Zerlegungen möglich:

$$\begin{array}{llll} z - y = t^2, & z - y = 3\,t^2, & z - y = 2\,s^2, & z - y = 6\,s^2, \\ z + y = 6\,s^2, & z + y = 2\,s^2, & z + y = 3\,t^2, & z + y = t^2. \end{array}$$

Hieraus folgt mit $t = 2\,r$

$$\begin{array}{lll} z = 3\,s^2 + 2\,r^2, & y = \pm\,(3\,s^2 - 2\,r^2), & x = 2\,r\,s, \\ z = s^2 + 6\,r^2, & y = \pm\,(s^2 - 6\,r^2), & x = 2\,r\,s. \end{array}$$

Setzt man diese Ausdrücke in $y^2 - 6\,x^2 = 1$ ein, so erhält man

$$9\,s^4 - 36\,r^2\,s^2 + 4\,r^4 = 1, \qquad s^4 - 36\,r^2\,s^2 + 36\,r^4 = 1.$$

Fassen wir diese Gleichungen als quadratische Gleichungen mit den Unbekannten $3\,s^2$ bzw. $6\,r^2$ auf und bilden die Diskriminante, so ergibt sich

$$2\,w^4 + 1 = u^2 \quad \text{mit} \quad w = 2\,r \quad \text{bzw.} \quad 8\,s^4 + 1 = v^2. \tag{2}$$

Die erste Gleichung ist ein Spezialfall der Gleichung $X^4 + 2\,Y^4 = Z^2$, von der EULER durch eine «descente infinie» die Unlösbarkeit in natürlichen Zahlen nachgewiesen hat[2]). Man verwendet dazu die Tatsache, daß alle ganzen Lösungen von $2\,X^2 + Y^2 = Z^2$, wo X, Y teilerfremd sind, durch $X = 2\,MN$, $Y = \pm\,(M^2 - 2\,N^2)$, $Z = M^2 + 2\,N^2$, $(M, N) = 1$ gegeben werden. Somit ist $w^2 = 2\,MN$, $M = T^2$, $N = 2\,S^2$, $8\,S^4 + 1 = T^4$, da $T^4 \equiv 1 \pmod 8$. Nun setzen wir $2\,S^2 = 2\,AB$, $A^2 - 2\,B^2 = \pm 1$, $A^2 + 2\,B^2 = T^2 \equiv 1$ (mod 4), $A = E^2$, $B = F^2$ und erhalten, da B gerade sein muß, $2\,F^4 + 1 = (E^2)^2$, wo $F^2 = B \leqq S^2 < N < w^2$.

Setzen wir in der zweiten Gleichung von (2) $v = 2\,c + 1$, so folgt aus $2\,s^4 = c\,(c+1)$ entweder $c = 2\,p^4$, $c + 1 = q^4$ oder $c = q^4$, $c + 1 = 2\,p^4$. Wie eben gezeigt, ist der erste

[1]) Messenger of Math. *51*, 169–171 (1922).

[2]) *Vollständige Anleitung zur Algebra*, L. Euleri opera omnia I_1, 443.

Fall unmöglich, so daß $q^4 + 1 = 2\,p^4$ übrigbleibt. Schreibt man dafür $q^4 + (q^4 - 1)^2/4 = p^8$, so erkennt man, daß $q = 1$, da nach EULER[1]) die Differenz von zwei verschiedenen Biquadraten niemals ein Quadrat ist. Die «descente infinie» wird hier durch folgende Formeln gegeben: $q^4 - 1 = 4\,g\,h$, $q^2 = g^2 - h^2$, $p^4 = g^2 + h^2$, $g^4 - h^4 = p^4\,q^2 \equiv 1 \pmod 4$, $h^2 = 2\,U\,V$, $g^2 = U^2 + V^2$, $U = 2\,a\,b$, $V = a^2 - b^2$, $h^2 = 4\,a\,b\,(a^2 - b^2)$, $a = e^2$, $b = f^2$, $a^2 - b^2 = d^2$, also $e^4 - f^4 = d^2$.

Damit haben wir als einzige Lösung im fünften Fall $s = r = 1$, $x = 2$, $y = 5$, $z = 7$, $n = 24$.

Aus dem System $3\,z^2 + 1 = 4\,y^2$, $3\,z^2 - 1 = 2\,x^2$ im sechsten Falle bilden wir mit $k = 2\,x\,y$ die Gleichung

$$9\,z^4 - 2\,k^2 = 1. \tag{3}$$

Da $3\,z^2 + 1 = 2\,x^2 \pmod 8$ unmöglich ist, ist (3) mit dem Gleichungssystem des sechsten Falles äquivalent. (3) kommt in einer Arbeit von LJUNGGREN[2]) vor, in der mit tiefliegenden Methoden (p-adische Methode von SKOLEM) gezeigt wird, daß für (3) außer $z = 1$, $k = 2$ keine Lösungen in ganzen Zahlen existieren. Damit erhalten wir für (1) die Lösung $m = n = 1$. E. TROST (Zürich).

Wie Herr H. FÄHNDRICH (Bern) mitteilt, wurde die Aufgabe 1875 von E. LUCAS (Nouv. Ann. math. [2] *14*, 336) gestellt. Nach zahlreichen fehlerhaften Versuchen wurde wohl die erste vollständige Lösung 1918 von G. N. WATSON (Messenger Math. *48*, 1–12) mit elliptischen Funktionen gegeben.

Aufgabe 80. On construit sur les côtés d'un triangle ABC extérieurement les triangles $BA'C$, $CB'A$ et $AC'B$ semblables à ABC. Trouver la relation entre les angles du triangle ABC pour que les droites AA', BB' et CC' passent par un même point. Démontrer que cette relation ne peut être vérifiée que quand ABC est un triangle équilatéral. H. BREMEKAMP (Delft, Hollande).

Lösung: Es sei $AC'BA'BC'$ das durch Ansetzen der ähnlichen Dreiecke an das Dreieck ABC entstehende Sechseck. Mit A, B, C bezeichnen wir zugleich die Winkel des Ausgangsdreiecks, mit P_A, P_B, P_C die Schnittpunkte von AA' mit BC bzw. BB' mit CA bzw. CC' mit AB. Nun ist

$$\frac{BP_A}{P_AC} = \frac{\triangle ABA'}{\triangle ACA'} = \frac{0{,}5\,AB\,A'B\sin(A+B)}{0{,}5\,AC\,A'C\sin 2\,C} = \frac{\sin^2 C}{2\sin A\,\sin B\,\cos C}.$$

Aus der Umkehrung des Satzes von CEVA ergibt sich die gesuchte Bedingung in der Form

$$\frac{BP_A}{P_AC}\cdot\frac{CP_B}{P_BA}\cdot\frac{AP_C}{P_CB} = \frac{1}{8\cos A\,\cos B\,\cos C} = 1. \tag{1}$$

Sind O, r Mittelpunkt bzw. Radius des Umkreises von Dreieck ABC, H sein Höhenschnittpunkt, so erhält man leicht (zum Beispiel mit dem Kosinussatz aus dem Dreieck AHM) die Beziehung

$$\overline{OH}^2 = r^2\,(1 - 8\cos A\,\cos B\,\cos C). \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt $OH = 0$, das heißt das Dreieck ist gleichseitig. Natürlich kann man das auch direkt aus (1) ableiten. F. GOLDNER (London).

Eine weitere Lösung sandte R. LAUFFER (Graz).

---

[1]) A. a. O. S. 439.

[2]) *Sur la résolution de quelques équations diophantiennes cubiques dans certains corps quadratiques*, Avhandl. norske vidensk. Akad. Oslo, Mat. Kl. 1943, Nr. 14, S. 21. Wir danken auch an dieser Stelle Herrn Prof. W. LJUNGGREN (Universität Bergen) für den Hinweis auf seine Lösung von (3), die eine neue Lösung des Problems gibt, von dem das «Intermédiaire des Recherches mathématiques», Paris, auf unsere Anfrage schrieb: «L'équation (1) a dû être étudiée par quelques amateurs, sans qu'une étude complète élémentaire ait été publiée, le sujet étant dans l'état actuel des choses fort difficile.»

Aufgabe 82. Fällt man von einem Punkt P in der Ebene eines Dreiecks Lote auf die Seiten AB, BC, CA, so entstehen die Abschnitte BA', CB' und AC'. Gibt es einen Punkt P, für den alle drei Abschnitte gleich groß sind? Welche Länge hat in diesem Fall der gleich große Abschnitt? R. LAEMMEL (Zürich).

Die Geraden, auf denen die Seiten des Dreiecks liegen, werden im Umlaufsinn ABC positiv orientiert. Wir setzen $BC = a > 0$, $CA = b > 0$, und $AB = c > 0$. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die in A' auf BC, in B' auf CA und in C' auf AB errichteten Normalen sich im selben Punkte P schneiden, ist, wie leicht zu sehen,

$$\overline{BA'}^2 + \overline{CB'}^2 + \overline{AC'}^2 = \overline{CA'}^2 + \overline{AB'}^2 + \overline{BC'}^2 .$$

Setzt man $BA' = CB' = AC' = x$, $CA' = x - a$, $AB' = x - b$, $BC' = x - c$, so ergibt sich $x = (a^2 + b^2 + c^2)/2\,(a + b + c)$. Die Aufgabe hat also immer genau eine Lösung für $x > 0$. A. BAGER (Hjørring, Dänemark).

Anmerkung: Legt man durch A, B und C die Normalen zu resp. AB, BC und CA, dann ist in diesem «Normalendreieck» P der Inkreismittelpunkt und x der Inkreisradius. Einer der Abschnitte BA', CB', AC' kann negativ sein.

An die Stelle des Inkreismittelpunktes des Normalendreieckes tritt dann ein Ankreismittelpunkt, und wegen der Ähnlichkeit des Normalendreieckes zu ABC tritt im Nenner $4\,s$ des Ausdruckes für x an Stelle von s entweder $s - a$ oder $s - b$ oder $s - c$.

Bei Änderung des Umlaufssinnes von ABC bleibt x ersichtlich unverändert, nicht aber die spezielle Lage von P. Vielmehr tritt P^* an Stelle von P; P^* ist in bezug auf den Umkreismittelpunkt U von ABC zu P symmetrisch, denn das «positive» und das «negative» Normalendreieck sind in bezug auf U zueinander symmetrisch.
A. STOLL (Zürich).

Weitere Lösungen sandten F. GOLDNER (London), R. LAUFFER (Graz), T. REICH (Glarus).

Neue Aufgaben

114. Soient c un cercle, d une de ses cordes, A un point de c où la tangente est parallèle à d, M et N des points de respectivement c et d alignés sur A. Le cercle tangent à d en N et passant par M est tangent à c et est orthogonal au cercle de centre A et passant par les extrémités de d. P. ROSSIER (Genève).

115. Soit R le rayon de la sphère circonscrite à une pyramide triangulaire, r celui de la sphère inscrite. Quel est le minimum de R/r? L. KOLLROS (Zurich).

116. *a*) Démontrer que pour qu'un nombre entier complexe $x + y\,i$ (c'est-à-dire tel que x et y sont des entiers ordinaires) soit une somme de deux carrés de nombres entiers complexes, il faut et il suffit que y soit un nombre pair et que, dans le cas où $x \equiv 2 \pmod 4$, le nombre y soit divisible par 4.

b) Démontrer que pour qu'un nombre entier complexe $x + y\,i$ soit une somme de trois carrés de nombres entiers complexes, il faut et il suffit que y soit un nombre pair. W. SIERPIŃSKI (Varsovie).

117. Drei Kreise, deren Radien bzw. 1, 2, 3 Einheiten messen, berühren sich zu je zweien von außen. Man berechne den Radius desjenigen Kreises, der von den drei gegebenen Kreisen von innen berührt wird. F. GOLDNER (London).

Literaturüberschau

Geometrie in der Ebene der komplexen Zahlen

Nachstehend sollen einige Bücher angezeigt werden, die sich mit der Geometrie in der Gaußschen Zahlenebene befassen. Man kommt insbesondere von zwei Problemkreisen aus zu Fragen dieser Art. Einmal wird sich in einem beschränkten Umfang der Funktionentheoretiker dafür interessieren. Tatsächlich kenne ich keine elegantere und kürzere