# Literaturüberschau

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **6 (1951)**

Heft 1

PDF erstellt am: **09.08.2024**

**Aufgabe 82.** Fällt man von einem Punkt $P$ in der Ebene eines Dreiecks Lote auf die Seiten $AB$, $BC$, $CA$, so entstehen die Abschnitte $BA'$, $CB'$ und $AC'$. Gibt es einen Punkt $P$, für den alle drei Abschnitte gleich groß sind? Welche Länge hat in diesem Fall der gleich große Abschnitt? R. LAEMMEL (Zürich).

Die Geraden, auf denen die Seiten des Dreiecks liegen, werden im Umlaufsinn $ABC$ positiv orientiert. Wir setzen $BC = a > 0$, $CA = b > 0$, und $AB = c > 0$. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die in $A'$ auf $BC$, in $B'$ auf $CA$ und in $C'$ auf $AB$ errichteten Normalen sich im selben Punkte $P$ schneiden, ist, wie leicht zu sehen,

$$\overline{BA'}^2 + \overline{CB'}^2 + \overline{AC'}^2 = \overline{CA'}^2 + \overline{AB'}^2 + \overline{BC'}^2.$$

Setzt man $BA' = CB' = AC' = x$, $CA' = x - a$, $AB' = x - b$, $BC' = x - c$, so ergibt sich $x = (a^2 + b^2 + c^2)/2\,(a + b + c)$. Die Aufgabe hat also immer genau eine Lösung für $x > 0$. A. BAGER (Hjørring, Dänemark).

*Anmerkung:* Legt man durch $A$, $B$ und $C$ die Normalen zu resp. $AB$, $BC$ und $CA$, dann ist in diesem «Normalendreieck» $P$ der Inkreismittelpunkt und $x$ der Inkreisradius. Einer der Abschnitte $BA'$, $CB'$, $AC'$ kann negativ sein.

An die Stelle des Inkreismittelpunktes des Normalendreieckes tritt dann ein Ankreismittelpunkt, und wegen der Ähnlichkeit des Normalendreieckes zu $ABC$ tritt im Nenner $4s$ des Ausdruckes für $x$ an Stelle von $s$ entweder $s - a$ oder $s - b$ oder $s - c$.

Bei Änderung des Umlaufssinnes von $ABC$ bleibt $x$ ersichtlich unverändert, nicht aber die spezielle Lage von $P$. Vielmehr tritt $P^*$ an Stelle von $P$; $P^*$ ist in bezug auf den Umkreismittelpunkt $U$ von $ABC$ zu $P$ symmetrisch, denn das «positive» und das «negative» Normalendreieck sind in bezug auf $U$ zueinander symmetrisch. A. STOLL (Zürich).

Weitere Lösungen sandten F. GOLDNER (London), R. LAUFFER (Graz), T. REICH (Glarus).

## Neue Aufgaben

*114.* Soient $c$ un cercle, $d$ une de ses cordes, $A$ un point de $c$ où la tangente est parallèle à $d$, $M$ et $N$ des points de respectivement $c$ et $d$ alignés sur $A$. Le cercle tangent à $d$ en $N$ et passant par $M$ est tangent à $c$ et est orthogonal au cercle de centre $A$ et passant par les extrémités de $d$. P. ROSSIER (Genève).

*115.* Soit $R$ le rayon de la sphère circonscrite à une pyramide triangulaire, $r$ celui de la sphère inscrite. Quel est le minimum de $R/r$? L. KOLLROS (Zurich).

*116.* *a*) Démontrer que pour qu'un nombre entier complexe $x + y\,i$ (c'est-à-dire tel que $x$ et $y$ sont des entiers ordinaires) soit une somme de deux carrés de nombres entiers complexes, il faut et il suffit que $y$ soit un nombre pair et que, dans le cas où $x \equiv 2 \pmod 4$, le nombre $y$ soit divisible par 4.

*b*) Démontrer que pour qu'un nombre entier complexe $x + y\,i$ soit une somme de trois carrés de nombres entiers complexes, il faut et il suffit que $y$ soit un nombre pair. W. SIERPIŃSKI (Varsovie).

*117.* Drei Kreise, deren Radien bzw. 1, 2, 3 Einheiten messen, berühren sich zu je zweien von außen. Man berechne den Radius desjenigen Kreises, der von den drei gegebenen Kreisen von innen berührt wird. F. GOLDNER (London).

# Literaturüberschau

*Geometrie in der Ebene der komplexen Zahlen*

Nachstehend sollen einige Bücher angezeigt werden, die sich mit der Geometrie in der Gaußschen Zahlenebene befassen. Man kommt insbesondere von zwei Problemkreisen aus zu Fragen dieser Art. Einmal wird sich in einem beschränkten Umfang der Funktionentheoretiker dafür interessieren. Tatsächlich kenne ich keine elegantere und kürzere

Behandlung der linear gebrochenen Funktion als diejenige in dem bekannten Lehrbuch der Funktionentheorie von BIEBERBACH. Die vor kurzem erschienene Funktionentheorie von CARATHÉODORY (Birkhäuser, Basel 1950), die auf so überraschende Art alte Wege neu beschreitet, behandelt in einführenden Kapiteln die Kreisgeometrie besonders eingehend, «hat doch die Kenntnis der Kreisgeometrie seinerzeit H. A. SCHWARZ zu allen seinen vielbewunderten Erfolgen verholfen». Zum zweiten hat sich in neuerer Zeit in der theoretischen Elektrotechnik eine Theorie der sogenannten Ortskurven entwickelt, die eine Diskussion von Kurven in der Ebene der komplexen Zahlen darstellt.

Es ist leicht einzusehen, daß jede Formel der analytischen Geometrie der gewöhnlichen $(x, y)$-Ebene komplex geschrieben werden kann. Es sei $z = x + i\,y = \varrho\, e^{i\varphi}$. Eine Kurvengleichung in rechtwinkligen kartesischen Koordinaten $f(x, y) = 0$ läßt sich mit Hilfe der Formeln

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}\,; \qquad y = \frac{z - \bar{z}}{2\,i}$$

übertragen; eine Gleichung in Polarkoordinaten $f(\varphi, \varrho) = 0$ vermöge $\varrho = |z|$;

$$\varphi = \arg z = \frac{1}{i} \log \frac{z}{|z|}$$

(Hauptwert). Für die Ortskurventheorie ist am wichtigsten die Übertragung der Parameterdarstellung einer Kurve $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$; sie lautet $z = f_1(t) + i\, f_2(t)$, wo $t$ ein *reeller* Parameter sein muß. Diese letzte Darstellung gestattet, die Kurve mit Hilfe der Parameterwerte zu graduieren, eine reelle Substitution $u = s(t)$ ändert die Graduierung, nicht aber die Kurve.

So ergibt sich zum Beispiel als Mittelpunktsgleichung des Kreises im ersten Falle $z\,\bar{z} = r^2$, im zweiten $|z| = r$, im dritten $z = r\,(\cos t + i \sin t) = r\, e^{i t}$. Die Substitution $t = \ln f(u)$, wo $f(u)$ eine beliebige reelle, positive Funktion ist, liefert $z = r[f(u)]^i$, ebenfalls eine Gleichung desselben Kreises. In den beiden letzten Fällen kann man natürlich auch von vektorieller Darstellung der Kurve reden.

Für den Mathematiker sind diese Methoden kaum besonders weitreichend. Natürlich läßt sich jede Aufgabe der analytischen Geometrie in komplexer Schreibweise lösen; die Rechnungen werden aber meines Erachtens im allgemeinen nicht einfacher. Ferner dürften noch folgende Nachteile der komplexen Schreibweise ins Gewicht fallen: Es ist nicht sehr einfach, die Ordnung einer algebraischen Kurve aus der komplexen Gleichung abzulesen, die Formeln sind nicht direkt auf mehrdimensionale Räume übertragbar und die Einführung imaginärer Elemente in die Gaußsche Zahlenebene (im Sinne der algebraischen Geometrie) ist unübersichtlich und meines Wissens bisher überhaupt nicht in Angriff genommen worden.

1. Der vornehmlich mathematisch interessierte Leser sei nachdrücklich auf das folgende Werk aufmerksam gemacht:

J. L. COOLIDGE: *The geometry of the complex domain*

242 Seiten, Oxford 1924

Das Buch setzt sich zum Ziel, eine möglichst vollständige Übersicht über die Darstellung imaginärer Elemente in der Geometrie zu geben. Der Eigenart des Verfassers entsprechend, wird der Stoff historisch entwickelt, und zwar derart eingehend, daß zum Beispiel auch einem so unklaren und zänkischen Autor wie MAXIMILIEN MARIE volle Gerechtigkeit widerfährt. Das Schlußkapitel ist der von-Staudtschen Theorie gewidmet.

2. C. ZWIKKER: *Advanced plane geometry*

299 Seiten, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1950

Der Verfasser hofft, durch sein Buch den traditionellen Unterricht in analytischer Geometrie der Ebene, dem er Einseitigkeit und ungerechtfertigte Überbetonung der Kegelschnitte vorwirft, in neue Bahnen zu lenken. Soweit dies durch die komplexe Schreibweise erreicht werden soll, glaube ich aus den oben angegebenen Gründen am

Erfolg zweifeln zu müssen. Das Buch will im Lehrgebäude der Geometrie eine mittlere Stufe einnehmen: Voraussetzung von Kenntnissen der Elementargeometrie und der Infinitesimalrechnung; Vermeidung allzu abstrakter Gedankengänge, Beschränkung auf die Ebene. In einem Aufbau, der auf Systematik keinen großen Wert legt, wird eine Fülle von Resultaten sowohl der analytischen wie der Infinitesimalgeometrie, ja der Potentialtheorie geboten. Das Buch wird bereichert durch zahlreiche, sorgfältig durchgeführte Anwendungen, vor allem aus der Elektrotechnik, dem Spezialgebiet des Verfassers. Die Grenzen dieses Spezialgebietes werden aber weit überschritten; daß dabei einige kleinere Versehen und Ungenauigkeiten unterlaufen, ist verständlich und spielt, gemessen an der Gesamtleistung, eine untergeordnete Rolle. Es sei erwähnt, daß die Exponentialkurve durch elementare Funktionen rektifizierbar ist, entgegen der Angabe auf Seite 28. Seite 15 werden $i^i$ und $\log i$ als eindeutig angegeben, Seite 280 ist $\log 1$ zwar vieldeutig; $\log i$ und $\log(-1)$ dagegen eindeutig. Unter den «Vorläufern» in der historischen Übersicht, Seiten 290–293, sollte doch wohl auch das unten angezeigte Buch von DEAUX stehen.

3. ROLAND DEAUX: *Introduction à la géométrie des nombres complexes*
163 Seiten, Maison d'édition A. de Boeck, Bruxelles 1947

Das Buch ist aus Vorlesungen für angehende Elektroingenieure hervorgegangen. Um das Eindringen zu erleichtern, hat der Verfasser früher ein Werk *Compléments de géométrie plane* herausgegeben (Bruxelles 1945). Sehr bald wird das Doppelverhältnis von vier Punkten eingeführt und häufig verwendet; das Leitmotiv der Darstellung ist die Untersuchung der Transformationen der Gaußschen Zahlenebene. Dadurch ergibt sich ein geschlossener Aufbau des Ganzen, der den Leser sehr befriedigt. Vielleicht werden aber zur Lösung einfacher Aufgaben wie der, den Mittelpunkt eines Kreises durch drei gegebene Punkte zu finden, allzu kräftige Hilfsmittel herangezogen (wie übrigens auch in früheren Aufsätzen der elektrotechnischen Fachliteratur).

4. W. MICHAEL: *Ortskurvengeometrie in der komplexen Zahlenebene*
93 Seiten, Verlag Birkhäuser, Basel 1950

Diese Monographie beschränkt sich auf das Wesentliche der Ortskurventheorie und auf die Verwendung der einfachsten Hilfsmittel, sie kommt zum Beispiel ganz ohne das Doppelverhältnis aus. Besonders erwähnenswert scheint mir die einheitliche und relativ einfache Behandlung der Kegelschnitte und ihrer Inversen. Es handelt sich sicher um eine zur Einführung in die Materie vorzüglich geeignete Arbeit. *Willi Lüssy*, Winterthur.

*Kurze Mathematikerbiographien*
(Beihefte zur Zeitschrift «Elemente der Mathematik»). Verlag Birkhäuser, Basel

Kein Geringerer als FELIX KLEIN hat mit Nachdruck auf die Bedeutung der Geschichte der Mathematik hingewiesen, wenn es darum gehe, einen Einblick in die Bedeutung des mathematischen Denkens für die moderne Kultur zu geben. KLEIN hat in seinen *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, die einen großen Zauber und einen kaum zu überschätzenden Einfluß ausgeübt haben, gezeigt, wie durch Anknüpfung an die persönlichen Schicksale der mathematischen Forscher das Interesse geweckt werden kann für die Fragen, mit denen sich die betreffenden Mathematiker beschäftigt haben.

Die Redaktion der «Elemente der Mathematik» gibt eine Reihe von kurzen Mathematikerbiographien heraus und verfolgt dabei dasselbe Ziel wie KLEIN, wenn auch in anderem Rahmen und ohne Beschränkung auf das 19. Jahrhundert. Dem Referenten liegen die folgenden sechs Hefte vor, genannt in der Reihenfolge ihres Erscheinens: *Jakob Steiner* (von L. KOLLROS), *Leonhard Euler* (von R. FUETER), *Ludwig Schläfli* (von J. J. BURCKHARDT), *Jost Bürgi und die Logarithmen* (von E. VOELLMY), *Johann und Jakob Bernoulli* (von J. O. FLECKENSTEIN), *Evariste Galois* (von L. KOLLROS). Alle Hefte geben auf 24 Seiten das Wesentliche über den Lebenslauf und ein Bild der wissenschaftlichen Leistungen. Alle Biographien enthalten mehrere Illustrationen, einzelne sind ergänzt durch Zeittafeln und Literaturangaben. Das Bernoulli-Heft enthält eine «Stammtafel der Mathematiker Bernoulli».

Einige Hefte sind für den Mathematikunterricht an Mittelschulen von Bedeutung: Teile der Euler- und der Bernoulli-Biographie sind vom Referenten für die Vorbereitung von Schülervorträgen verwendet worden, ebenso das Bürgi-Heft zur Klassenlektüre im Zusammenhang mit der Behandlung der Logarithmen.

Wer sich für die Psychologie der Mathematiker und der mathematischen Entdeckungen interessiert, wird in allen Heften eine Fülle von Einsichten erhalten. In diesem Zusammenhang seien besonders die Biographien von GALOIS und SCHLÄFLI zur Lektüre empfohlen.

Man darf der Schriftleitung der «Elemente» und dem Verlag Birkhäuser dankbar sein, daß sie denjenigen, denen an der Erkenntnis der Bedeutung der Mathematik liegt, tatkräftig unter die Arme greifen durch die Herausgabe dieser prächtigen Reihe von Mathematikerbiographien. *H. Ramser*, Aarau.

EDOUARD LABIN: *Calcul opérationnel*

149 Seiten, Verlag Masson & Cie., Paris 1950

Der dem Referenten vorliegende Band ist der erste aus einer Reihe von Darstellungen, wie sie bei uns nicht üblich sind und deren Abfassung nach folgenden Richtlinien erfolgt: In den Bänden sollen die Kenntnisse aus der höheren Mathematik zusammengestellt werden, die man in den Anwendungen braucht. Dabei werden nur Resultate gebracht; Beweise und Beispiele sind ausgeschlossen. Die Sätze werden nach praktischen, nicht nach genetischen Gesichtspunkten angeordnet. Auf möglichst allgemeine Formulierung der Resultate wird verzichtet.

Der zunächst erschienene Band *Calcul opérationnel* beschäftigt sich in der Hauptsache mit Laplace-Transformationen und ihren Anwendungen auf Differential-, Integral- und Differenzengleichungen. Der Verfasser hat bei der Abfassung dieses ersten Bandes alle notwendigen Bedingungen beachtet, die bei der beschriebenen Art der Darstellung erfüllt werden müssen: Die Resultate sind übersichtlich dargestellt. In mehreren Tabellen sind Funktionen und ihre Transformierten angegeben. Ferner enthält der Band ein ausführliches Inhaltsverzeichnis, eine Liste der Abkürzungen, ein alphabetisches Namen- und Sachregister und eine Bibliographie.

Der Referent ist überzeugt, daß sich der Band viele Freunde erwerben wird, besonders unter Physikern und Ingenieuren. *H. Ramser*, Aarau.

GERRIT BOL: *Elemente der analytischen Geometrie*

1. Teil, 232 Seiten, 1948; 2. Teil, 156 Seiten, 1949. Verlag Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen

In der vom Mathematischen Forschungsinstitut Oberwoltach bei Freiburg i. Br., das unter der Leitung von Prof. Dr. W. Süss steht, herausgegebenen Serie mathematischer Lehrbücher sind die angezeigten Bücher als Band II und V erschienen. Ein dritter Teil, der der höheren Geometrie gewidmet sein soll, wird noch folgen.

Teil 1 enthält die Grundzüge der ebenen und räumlichen Geometrie mit den folgenden Abschnitten: 1. Gerade, Ebene, lineare Gleichungen; 2. Geometrie auf der Geraden; 3. Kreise und Kugeln; 4. Oberfläche, Inhalt, Vektorprodukt; 5. Kegelschnitte; 6. Algebraische Kurven und Flächen.

Teil 2 umfaßt die Abbildungen und Transformationen mit den folgenden Kapiteln: 7. Determinanten und lineare Gleichungen; 8. Transformationen, Bewegungen, Affinitäten; 9. Abbildungen und Gruppen.

Wie es sich für ein modernes Werk versteht, steht der Vektorbegriff im Mittelpunkt. Konsequent wird das Imaginäre berücksichtigt. Projektive Geometrie ist eingeflochten, doch fehlt der Begriff der Dualität.

Die Darstellung ist einwandfrei, einfach und klar, so daß sich der Leser mühelos einarbeiten kann. Diese Bücher, deren Stoffkreis nicht wesentlich über das hinausgeht, was an unseren Schulen vom Typus C behandelt wird, können rückhaltlos empfohlen werden. Besonders wertvoll sind die von J. E. HOFFMANN verfaßten historischen

Notizen. Die Figuren sind gut, jedoch sind im zweiten Teil die Figuren 8 bis 16 offenbar weniger stark verkleinert worden, so daß sie recht massiv wirken. Bei den Permutationen wird der Ausdruck «Fehlstellung» für Inversion verwendet, damit wohl keine Verwechslung mit der Inversion an Kreis und Kugel vorkommt. Ungeschickt ist, daß Teil 1 das Inhaltsverzeichnis am Schluß, Teil 2 aber am Anfang bringt. *P. Buchner.*

A. SOMMERFELD: *Vorlesungen über theoretische Physik*

Bd. I: *Mechanik*, 4. Auflage (1949), 276 Seiten; Bd. II: *Mechanik*, 2. Auflage (1947), 375 Seiten
Dieterichsche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden

Der zweiundachtzigjährige Gelehrte, Mitglied zahlreicher wissenschaftlicher Gesellschaften und Akademien und Inhaber ebenso zahlreicher wissenschaftlichen Auszeichnungen, hat seine Vorlesungen, die er zuletzt in München gehalten hat und welche die Frucht eines arbeitsreichen Lebens sind, in Buchform veröffentlicht. Der im Jahre 1942 festgelegte Plan des Gesamtwerkes sieht sechs Bände vor. Die ersten zwei Bände sind der Mechanik gewidmet. Der erste Band, der bereits in der vierten Auflage vorliegt, weist gegenüber den früheren Ausgaben nur einige interessante Zusätze auf. Sonst enthält er, in stark erweitertem Rahmen eines Hochschulprogramms, die Punktmechanik, die Mechanik der Systeme und der starren Körper mit einer tiefgehenden Kreiseltheorie, die Mechanik der Relativbewegung, einen Abriß der Schwingungslehre und eine ausführliche Darstellung der analytischen Mechanik von LAGRANGE und HAMILTON. Die Axiomatik, welche der Mechanik seit NEWTON zugrunde liegt, sowie die Fragen von Raum, Zeit und Bezugssystem sind eingehend, auch von neuerem Standpunkt aus, erörtert. Die Behandlung des Stoffes erfolgt auf analytischem und vektoriellem Wege, wobei die mathematischen Hilfsmittel über die Analysis nicht hinausgehen. Sehr viele Anwendungsbeispiele, welche der Astronomie, der Physik und der Technik entnommen sind, beleben den Inhalt außerordentlich. Der zweite Band enthält die Mechanik deformierbarer Medien, wobei unter den letzten die elastischen, flüssigen und gasförmigen Körper gemeint sind. Die Mittel, deren SOMMERFELD sich hier bedient, sind wesentlich erweitert. Die Vektoranalysis und der Tensorkalkül werden ausgiebig gebraucht, beide werden allerdings auch entwickelt. Trotzdem ist der Verfasser ständig bemüht, das eigentliche Wesen der physikalischen Probleme nicht zu verdecken. Und es sind fesselnde Probleme. Sie sind zusammengegliedert, je nachdem ob sie zur Statik, zur Kinematik oder zur Dynamik gehören, wobei am Schluß noch speziell die Hydrodynamik und die Elastizitätstheorie ergänzt werden. Der rote Faden bleibt immer das, was den verschiedenen Problemen in der Behandlungsmethodik gemeinsam ist. Die aufgeworfenen Probleme sind derart mannigfaltig und umfangreich, daß man Schwierigkeit empfindet, sie alle lückenlos aufzuzählen. Es sind aber zweifellos die Wirbel-, Turbulenz- und Grenzschichtprobleme, welche eine ganz besondere Beachtung verdienen. Hier geht der Verfasser über das Übliche hinaus; sehr viele Forschungsarbeiten der letzten Jahre sind eingehend berücksichtigt. Eine andere fesselnde Gruppe bilden die Wellenprobleme: es sind die schweren Wellen bei tiefem und seichtem Wasser, Ringwellen, Schiffswellen, Kapillarwellen, Riemannsche Stoßwellen und elastische Oberflächenwellen des Halbraumes. Der Verfasser lüftet eine Ecke des Vorhanges vor der Theorie der flüssigen Reibung, vielleicht eher zu wenig für ein derart entwickeltes Gebiet. Seine souveräne Art, den oft schwierigen Stoff leichtverdaulich darzubieten, muß besonders unterstrichen werden. Manchmal streift diese Eigenart das Fröhlich-Spielerische, wodurch das Interesse am Studium immer wachgehalten wird. Rund siebzig Aufgaben, teilweise umfangreiche, mit Anleitungen zu ihrer Lösung, werden von den Studierenden sicher sehr begrüßt. Man kann sich nichts Besseres zum Studium der Art und Weise, wie mathematische Forschungsmethoden auf physikalische Probleme übertragen werden müssen, vorstellen. Die Bücher werden deswegen den Studierenden der Physik, Mathematik und Technik warm empfohlen, ebenso den Lehrern der genannten Gebiete. Wenn die äußerliche Ausstattung der Bücher nur etwas schöner wäre, würden sich die Leser auch von diesem Standpunkt aus restlos begeistert fühlen. Hoffen wir es für die nächsten Auflagen, die sicher zu erwarten sind. *G. Tordion*, Zürich.