# Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **6 (1951)**

Heft 2

damit die Lösungen $q$ und $q'$. Von diesen besitzt nur $q$ für das astronomische Problem Bedeutung, da der Schwerpunkt ein innerer Punkt der Strecken $AB$ sein muß. Eine Probe ist dadurch gegeben, daß sich die Strecken $S_1S_2$ und $S_2S_3$ wie die zugehörigen Zeitabschnitte verhalten müssen.

Eine einfachere Lösung erhalten wir, wenn wir die Zeiten $t_1, t_2, t_3$ für die betrachteten Sternorte zur Konstruktion benutzen. Die Aufgabe wird dadurch überbestimmt. Für die Zeit $t_2$ benötigen wir nur noch die Lage der Geraden $g_2$, nicht aber diejenige der Punkte $A_2$ und $B_2$. Wir betrachten (Fig. 6) die Bewegung der Sterne bezogen auf ein Koordinatensystem, das sich relativ zum Ausgangssystem in der Richtung $A_1A_3$ mit der Geschwindigkeit $A_1A_3/(t_3-t_1)$ gleichförmig parallel verschiebt. Auch in diesem System wird die Bewegung des gesuchten Schwerpunktes gleichförmig und geradlinig. Ist $A_1B_1$ die Stellung im neuen System zur Zeit $t_1$, so ist $A_3^*B_3^*$ $(A_3^* \equiv A_1)$ die Stellung zur Zeit $t_3$. Die Verbindungsgerade $g_2$ der Sternorte zur Zeit $t_2$ erhalten wir durch Parallelverschiebung von $g_2$ in der Richtung $A_3A_1$ um die Strecke $d = A_1A_3\,(t_2-t_1)/(t_3-t_1)$. Da die Verbindungsgerade der drei Schwerpunktslagen die Strecken $A_1B_1$ und $A_3^*B_3^*$ im gleichen Verhältnis teilt, erfolgt die Schwerpunktsbewegung parallel zu $B_1B_3^*$. Teilen wir $B_1B_3^*$ im Punkte $P$ innerhalb im Verhältnis $(t_2-t_1):(t_3-t_2)$, so muß der Schwerpunkt $S_2^*$ auf $A_1P$ und auf $g_2^*$ liegen. Damit ist die Lösung $S_1^*S_2^*S_3^*$ im neuen Koordinatensystem gegeben. Aus ihr folgt sofort die Lösung $S_1S_2S_3$ im Ausgangssystem. $S_2$ wird die (in der Figur 6 nicht eingetragene) Strecke $A_2B_2$ im gleichen Verhältnis teilen müssen wie $S_1$ und $S_3$ die Strecken $A_1B_1$ und $A_3B_3$, wenn die Sternorte und Zeiten miteinander in Einklang stehen. Für die Verwertung des gesamten Beobachtungsmaterials gilt die gleiche Bemerkung wie beim ersten Problem.

H. SCHÜEPP, Zollikon-Zürich.

# Aufgaben

**Aufgabe 38.** a) Im Jahre 0 leben tausend Individuen, welche die nullte Generation bilden. Nach einem Jahre sterben sie ab und hinterlassen Nachkommen, die erste Generation usw. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Individuum $k$ (0, 1, 2, ..., 20) «Kinder» hat, sei $p_k$, so daß also $p_0 + p_1 + \cdots + p_{20} = 1$ gilt. Ferner sei die Erwartung $0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2\,p_2 + \cdots + 20\,p_{20} = 1$. Wir setzen die Wahrscheinlichkeit, daß ein Individuum nach $n$ Jahren keine Nachkommen mehr hat, gleich $x(n)$. Diese Folge (für $n = 1, 2, \ldots$) ist nirgends abnehmend und $\leqq 1$. Sie besitzt also eine Grenze $x$. Die Aufgabe besteht in der Berechnung und Deutung dieses $x$.

b) Im Jahre 0 sollen alle Individuen verschiedene Familiennamen haben, die sich vererben. In der 1000. Generation sei die Anzahl der Individuen 2000. Was läßt sich über die Anzahl der noch existierenden Familiennamen aussagen? A. SPEISER (Basel).

*Lösung des Aufgabenstellers:* Es gilt die Formel

$$x\,(n+1) = p_0 + p_1\,x(n) + p_2\,x^2(n) + \cdots + p_{20}\,x^{20}(n).$$

In der Grenze für $n = \infty$ und wegen der Stetigkeit der Wurzeln als Funktionen der Koeffizienten gilt: $p_0 + (p_1 - 1)\,x + p_2\,x^2 + \cdots + p_{20}\,x^{20} = 0$. Diese Gleichung hat die Wurzel $x = 1$ und nach der Descartesschen Zeichenregel noch genau eine positive Wurzel. Nun verschwindet die Ableitung $p_1 - 1 + 2\,p_2\,x + \cdots + 20\,p_{20}\,x^{19}$ für $x = 1$ nach der «Erwartung». Daher ist auch die zweite Wurzel gleich 1. Die Paradoxie besteht nun darin, daß die Wahrscheinlichkeit für Nachkommen verschwindet, während doch die Erwartung stets gleich 1 bleibt. Hierfür leitet nun die zweite Frage nach der Lösung.

Die Wahrscheinlichkeit, daß man nach 1000 Generationen noch genau $k$ Nachkommen hat, sei $q_k$, dann gilt, wenn man $20^{1000} = u$ setzt $q_0 + q_1 + \cdots + q_u = 1$. Hier ist schon $q_0$ beinahe gleich 1, also sind alle übrigen $q$ samt ihrer Summe sehr klein. Nun gilt aber für die Erwartung $1 \cdot q_1 + 2\,q_2 + \cdots + k\,q_k + \cdots + u\,q_u = 1$. Dieser Betrag 1 kann also nur von großen Faktoren $k$ herstammen, und so lautet die Antwort auf die zweite Frage etwas pointiert: Fast alle 2000 Individuen werden denselben Namen tragen. Dies stimmt mit den Erfahrungen bei abgeschlossenen Gruppen von Menschen gut überein. Man kann auch, freilich mit großer Übertreibung sagen: Selbst wenn es zu Adams Zeiten gleich viele Menschen gegeben hat wie heute, so stammen doch alle Menschen von ihm ab, falls man nur auf die männliche Deszendenz sieht, entsprechend alle Frauen von Eva.

Ist die Erwartung größer als 1, so wird der Grenzwert $x$ kleiner als 1 sein, und man kann auf Nachkommen rechnen, denn die Ableitung ist alsdann für $x = 1$ positiv.

**Aufgabe 64.** Quanti cerchi esistono ortogonali in tre punti ad una cubica piana razionale? A. LONGHI (Lugano).

*Solution:* Le résultat cherché est un cas tout particulier d'un résultat fort général, que A. LONGHI a exposé dans les *Rendiconti del Seminario matematico di Padova,* 1933. L'idée essentielle de la démonstration suivante est également due à A. LONGHI.

Considérons une courbe de 3^e^ ordre et de genre 0 (ayant un point double). A tout point $P$ de la courbe, faisons correspondre un point $P'$ tel qu'il existe un cercle tangent à la courbe en $P$ et en $P'$. Comme un cercle tangent à la courbe en $P$ et passant par un point $S$ de la courbe la coupe encore en 3 points bien déterminés par $S$, $S$ définit une involution $I_4^1$ qui a 6 points doubles. Ces points sont les points $P'$. La correspondance $P$, $P'$ est donc une correspondance $(6, 6)$. Remarquons qu'elle a 12 points doubles $B$, qui sont les points de contact des cercles surosculateurs de la courbe. De plus, la formule de JONQUIÈRES montre qu'il existe 8 groupes composés de 3 points doubles, c'est-à-dire qu'il existe 8 cercles tritangents à la courbe.

A tout point $P'$, la même correspondance adjoint 5 points $P''$ différents de $P$ et à tout point $P''$, 5 points $P'''$ différents de $P$. La correspondance $P$, $P'''$ est une correspondance $(150, 150)$ qui a donc 300 points doubles, $P = P'''$.

Quelle est la signification de ces points? Soit $A$ un point qui correspond à un point de contact $B$ d'un cercle surosculateur. Comme $P = A$, $P' = B$, $P'' = B$, $P''' = A$, c'est un point double. Il y en a donc 60.

Soient $C$, $D$, $E$ les points de contact d'un cercle tritangent. Si $P = C$, $P' = D$, $P'' = E$, $P''' = C$ et si $P = C$, $P' = E$, $P'' = D$, $P''' = C$. Chacun des points $C$, $D$, $E$ est donc un point double à compter deux fois, donc 48 points doubles tombent en ces points.

Quelle est la signification des 192 points doubles restants? Soit $D$ un de ces points. $D' = E$, $D'' = F$, $D''' = D$. Mais on a également $D' = F$, $D'' = E$, $D''' = D$. Chacun des points $D$, $E$, $F$ est donc un point double à compter deux fois. Il y a donc 32 triangles $DEF$ transformés en eux-mêmes cycliquement par la correspondance donnée. Ces triangles sont tels qu'il existe un cercle tangent à la courbe en $D$ et $E$, un autre en $E$ et $F$, un troisième en $F$ et $D$, ces trois cercles étant différents. Par conséquent, les tangentes à la courbe en $D$, $E$ et $F$ se coupent au centre radical $G$ de ces trois cercles. Comme $G$ a même puissance par rapport à ces trois cercles, il est le centre d'un cercle orthogonal à la courbe en $D$, $E$, $F$. Il y a donc 32 cercles triorthogonaux à la courbe donnée. J.-P. SYDLER (Zurich).

**Aufgabe 83.** Es sei

$$Z_0 = 1, \qquad Z_k = 9^{Z_{k-1}} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Gesucht sind die letzten sechs Ziffern von $Z_6$. (Die Zahlen $Z_k$ sind die größten Zahlen, die man mit $k$-Ziffern schreiben kann.) H. FAEHNDRICH (Bern).

*Lösung:* Es ist

$$Z_k = (10-1)^{Z_{k-1}} \equiv \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^{n+1} \binom{Z_{k-1}}{n} 10^n. \qquad (\text{mod } 10^k)$$

In dieser Rekursionsformel haben wir von dem Binomialkoeffizienten mit dem Zeiger $n$ ($n = 1, 2, \ldots, k-1$) nur die letzten $k-n$ Ziffern zu berechnen. Somit können wir an Stelle von $Z_{k-1}$ die aus den letzten $k-1$ Ziffern gebildete Zahl einsetzen. Wir erhalten auf diese Weise für die letzten $k$ Ziffern von $Z_k$ der Reihe nach: 1, 9, 89 289, 5289, 45289, *745289*. T. Reich (Glarus).

Weitere Lösungen sandten A. Bager (Hjørring, Dänemark), F. Goldner (London).

**Aufgabe 84.** Démontrer que

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{27}} + \arcsin \sqrt{\frac{3}{28}} = \frac{\pi}{6}.$$

P. Rossier (Genève).

*Lösung:* $ABCD$ sei das bei $B$ und $D$ rechtwinklige Kreisviereck mit den Seiten $AB = \sqrt{27}$, $BC = 1$, $CD = \sqrt{3}$, $DA = 5$. Nach dem Satz von Ptolemäus ist $BD = \sqrt{7}$, also nach dem Kosinussatz $\cos B\widehat{A}D = 0{,}5\sqrt{3}$. Hieraus folgt die Behauptung in der Form $\pi/6 = \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD$. F. Goldner (London).

Lösungen durch direkte Ausrechnung sandten A. Bager (Hjørring, Dänemark), S. Ciampa (Pisa), L. Kieffer (Luxemburg), R. Lauffer (Graz), M. P. Marchal (Basel), G. Neuweiler (Olten), A. Schwarz (Seuzach).

**Aufgabe 85.** Eine Kette von der Länge $L$ ist so aufgehängt, daß die Fläche des Segments, das durch die Verbindungsgerade der Aufhängepunkte und die Kettenlinie begrenzt wird, möglichst groß oder möglichst klein ist. Dann besteht zwischen der Sehne $s$, dem Durchhang $f$ in der Mitte der Sehne und der Länge $L$ die Beziehung

$$2f = L \sqrt[4]{\frac{L-s}{L+s}}. \qquad (B)$$

Für das maximale Segment gilt mit sehr guter Annäherung (Fehler < ? %)

$$f = \frac{s}{2} = \frac{L}{3}.$$

E. Trost (Zürich).

*Teillösung:* Nehmen wir die Aufhängepunkte in gleicher Höhe an und ist

$$y = a \cosh \frac{x}{a}$$

die Gleichung der Kettenlinie, so gelten die Beziehungen:

$$f + a = a \cosh \frac{s}{2a}, \qquad (1)$$

$$L = 2a \sinh \frac{s}{2a}, \qquad (2)$$

$$F = s\,a \cosh \frac{s}{2a} - 2a^2 \sinh \frac{s}{2a}. \qquad (3)$$

Aus (2) folgt $s = 2a$ area sinh $(L/2a)$, somit wird aus (3)

$$F = a\sqrt{4a^2 + L^2}\, \operatorname{area\,sinh} \frac{L}{2a} - aL.$$

Durch Differentiation nach $a$ ergibt sich

$$\frac{8\,a^2+L^2}{\sqrt{4\,a^2+L^2}}\cdot\frac{s}{2\,a}=2\,L. \tag{4}$$

Aus (1) und (2) erhält man $8\,a\,f=L^2-4\,f^2$. Setzt man den hieraus berechneten Wert für $a$ in (4) ein, so ergibt sich nach einiger Umformung die in der Aufgabe angegebene Beziehung $(B)$. A. SCHWARZ (Seuzach).

Zur Bestimmung des relativen Fehlers der Näherung setzen wir $L=1$. Aus (2) und (4) ergibt sich

$$G(f)=\frac{1+16\,f^4}{2\,f(1+4\,f^2)}\ln\frac{1+2\,f}{1-2\,f}-2=0.$$

Ausgehend von dem guten Näherungswert $f=1/3$ findet man mit der Formel von NEWTON die genauere Lösung $f_1=f-G(f)/G'(f)=0{,}33\ldots-0{,}0015/3{,}216=0{,}33287$. Der relative Fehler für den Durchhang beträgt somit $0{,}14\%<1\%$.

Für die Sehne erhält man jetzt aus $(B)$ $s=(1-16\,f^4)/(1+16\,f^4)=0{,}6716$. Der relative Fehler der Näherung $s=2/3$ beträgt $0{,}73\%<1\%$.

Um zu zeigen, daß das oben angegebene Maximum auch richtig bleibt, wenn man verschieden hohe Aufhängepunkte zuläßt, halten wir die Länge $s$ der Sehne fest und betrachten die Fläche $S$ des Segments bei Veränderung des Winkels $\varphi$ der Sehne mit der Horizontalen. Nach einiger Rechnung finden wir $S=0{,}5\,L\,s\cos\varphi\,[\operatorname{ctgh} z-z^{-1}]$, wo $z$ aus der transzendenten Gleichung

$$\frac{\sqrt{L^2-s^2\sin^2\varphi}}{s\cos\varphi}=\frac{\sinh z}{z} \tag{5}$$

zu berechnen ist. $\cos\varphi$ kann mit (5) durch $z$ ausgedrückt werden. $dS/dz$ ist für $0<z<\infty$ negativ und verschwindet für $z=0$; dieser Wert ist wegen $L>s$ ausgeschlossen. Die Nullstelle $\varphi=0$ der aus (5) berechneten Ableitung $dz/d\varphi$ gibt somit das Maximum von $S$.

Das minimale Segment entsteht bei gestreckter Kette. Hier ist $L=s$, $f=0$, so daß unsere Beziehung $(B)$ auch für das Minimum gilt. E. T.

Weitere Teillösungen gingen ein von F. GOLDNER (London) und R. LAUFFER (Graz).

## Neue Aufgaben

*118.* Man zeige, daß es für die kubische Parabel $y=a\,x^3-b\,x$, $a>0$, $b>2\sqrt{2}$, zwei umschriebene und zwei einbeschriebene Quadrate gibt und daß die Flächenverhältnisse der beiden Quadratpaare gleich groß sind.
C. BINDSCHEDLER (Küsnacht).

*119.* Bezeichnet $s$ den halben Umfang eines Dreiecks, $S$ die Summe der Tangenten der halben Dreieckswinkel und $P$ das Produkt dieser Tangenten, so läßt sich folgende Gleichung vierten Grades aufstellen:

$$x^4-s\,(P+S)\,x^3+s^2\,(1+P\,S)\,x^2-2\,s^3\,P\,x+s^4\,P^2=0.$$

Was ist die geometrische Bedeutung der vier Lösungen dieser Gleichung?
R. LAEMMEL (Zürich).

*120.* Bezeichne $\mathfrak{G}$ eine endliche $p$-Gruppe mit den erzeugenden Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_k$, so daß $a_2, \ldots, a_k$ $\mathfrak{G}$ nicht erzeugen. Dann wird $\mathfrak{G}$ auch von $a_1^p, a_2, \ldots, a_k$ nicht erzeugt. L. RÉDEI (Szeged, Ungarn).

*121.* Sind $m$ und $n$ teilerfremde natürliche Zahlen $>1$, dann liegt in jedem Intervall $(1, 2)$, $(2, 3)$, $\ldots$, $(m+n-2,\ m+n-1)$ genau je eine der Zahlen $j\,(m+n)/n$, $k\,(m+n)/m$ $(j=1, 2, \ldots, n-1;\ k=1, 2, \ldots, m-1)$. R. LAUFFER (Graz).