Berichte

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **6 (1951)**

Heft 3

PDF erstellt am: **09.08.2024**

123. Im Innern eines Kreises ist ein fester Punkt P gegeben. Durch P sollen zwei aufeinander senkrecht stehende Sehnen so gelegt werden, daß die Summe ihrer Längen möglichst groß ist. P. TURÁN[1]).

124. Dem Einheitskreis ist ein reguläres n-Eck $P_1 P_2 \ldots P_n$ einbeschrieben. P sei ein Punkt der Kreisperipherie. Berechne

$$\overline{PP}_1^2 + \overline{PP}_2^2 + \cdots + \overline{PP}_n^2.$$

J. MOLNÁR[1]).

125. If n is an integer greater than 1, the least prime factor of n is less than the least prime factor of $2^n - 1$. G. HIGMANN (Manchester).

126. Démontrer qu'il existe pour tout nombre naturel m un nombre naturel n, tel que les chiffres consécutifs du nombre m forment les chiffres initiaux du nombre 2^n (c'est-à-dire que $2^n = m \cdot 10^k + r$, où k et r, sont naturels et $r < 10^k$).

W. SIERPIŃSKI (Varsovie).

127. Von einem Dreieck ABC sei CA Durchmesser eines Kreises (A) und CB Durchmesser eines Kreises (B). Die beiden Kreise schneiden sich außer in C noch im Höhenfußpunkt C_2 auf AB. Ferner sei C Mittelpunkt einer symmetrischen Strahleninvolution, von der CA und CB ein Paar bilden. Ein beliebiges Paar dieser Involution schneide (A) außer in C in U und U' und (B) in V und V'. Man beweise:

1. UU' und VV' schneiden sich auf CC_2. 2. UV' und VU' schneiden sich auf AB. 3. Die Winkelhalbierenden von UU' und VV' wie auch die von UV' und VU' sind parallel zu den Doppelstrahlen der Involution. A. STOLL (Zürich).

128. Man konstruiere diejenigen Kreise, welche durch den Mittelpunkt einer gleichseitigen Hyperbel gehen und die Hyperbel doppelt berühren. H. BÖHEIM (Graz).

129. Als «Linse» bezeichnen wir ein Flächenstück, das aus zwei kongruenten, längs der Sehne zusammengefügten Kreissegmenten mit dem Zentriwinkel $\alpha < 180°$ besteht. Man beweise, daß man einem gleichseitigen Dreieck neben dem Inkreis ($\alpha = 180°$) noch genau zwei Linsen ($\alpha = 60°$ und $\alpha = 120°$) so einbeschreiben kann, daß sie sich im Dreieck frei drehen können und dabei ständig alle drei Seiten berühren. E. TROST (Zürich).

Berichte

Die Grazer Tagung für mathematischen Unterricht (Fortsetzung)

Vorschläge zur Förderung des geometrischen Unterrichts

Wie kann das Interesse des Schülers gefördert werden? Wie erreicht man, daß der Erwachsene in seiner Erinnerung an die Schule ein gutes Urteil über den geometrischen Unterricht bewahrt?

Im Realgymnasium, dem verbreitetsten österreichischen Schultypus, werden die Grundzüge des Grund- und Aufrißverfahrens und des Schrägrißverfahrens gelehrt. Der Schüler sollte aber auch andere gebräuchliche Verfahren kennenlernen, zum Beispiel die kotierte Projektion, die axonometrische Darstellung und die Perspektive. Und in der Stoffauswahl sollte noch mehr als bisher der Formenreichtum gezeigt werden, den Natur und Technik bieten. Denn der Schüler wird diesen Gegenstand im allgemeinen nicht um seiner selbst willen studieren, sondern sich oder dem Lehrer die Frage vorlegen, inwiefern ihm diese Kenntnisse nützen oder eine geistige Bereicherung bedeuten.

[1]) Diese Aufgabe stammt aus der sehr anregenden ungarischen Problemzeitschrift Középiskolai Matematikai Lapok [II] *4* (Budapest 1950).

Zugunsten dieser Forderungen soll im Unterricht auf andere Dinge verzichtet werden. Zunächst auf die zeitraubenden und manchmal verwickelten Konstruktionen von Gebilden in allgemeiner Lage aus unbequemen Bestimmungsstücken; sie haben zwar formalbildenden Wert, aber ein Unterrichtsfach mit einer so geringen Stundenzahl wie die darstellende Geometrie – je zwei Wochenstunden in den beiden letzten Schuljahren – muß sein Dasein verteidigen, indem es vor allem durch seinen Inhalt Interesse erweckt. Ferner kann und soll man auf die Schattenkonstruktionen verzichten. Sie geben die Helligkeitsverhältnisse nur unvollkommen wieder und werden von den Schülern als Luxus empfunden. Ihr Beitrag zur Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens ist gering, und rein konstruktiv bieten sie auch nicht viel Interessantes. Mit demselben konstruktiven Aufwand könnte man die Durchschnittmethode der Perspektive erklären.

Wenn auf solche Weise das Interesse am Inhalt gehoben ist, wird man den Unterricht auch durch gelegentliche und sparsame Hinweise auf seine formalen Bildungswerte fördern können: klares Denken, sprachliche Schulung, Selbstkritik, geistige Redlichkeit und selbstlose Liebe zu einer Sache, selbständiges Urteilen aus eigenem Nachdenken statt blinder Anerkennung fremder Autorität.

Von bestem Erfolg für die geistige Entwicklung des Schülers wird es auch sein, wenn man ihm in geeigneter Form etwas über das Wesen und den Zweck der mathematischen Wissenschaften sagt. Die Mathematik ist kein starres, fertiges System, wie der Laie meint, sondern ein lebendiger und werdender Organismus – jährlich erscheinen etwa 1500 neue mathematische Arbeiten. Daher liegt das wesentliche Moment ihrer Entwicklung auch nicht in der strengen Beweisführung, sondern in der Fülle von Phantasie, die sich in der Bildung fruchtbarer Begriffe und in der Auffindung tiefer Zusammenhänge kundtut. Nach Georg Cantor liegt das Wesen der Mathematik in ihrer Freiheit, nämlich in der Freiheit, mit der sich die Mathematik ihren Gegenstand selbst schafft. Zugleich aber dringt die Mathematik zu einer immer tieferen Erfassung der Wirklichkeit vor – allein in den USA. spielen heute gegen 5000 Mathematiker in der tachnischen Entwicklung und in der naturwissenschaftlichen Forschung eine gewichtige Rolle.

F. Hohenberg, Graz.

Über anschauliche Sätze der elementaren Zahlentheorie

Als ein besonderer Fall solcher anschaulicher Sätze wurden die Farey-Reihen besprochen. Als Farey-Reihe n-ter Ordnung bezeichnet man die Reihe der Brüche mit Nenner kleiner oder gleich n in wachsender Reihenfolge angeschrieben. Sind dann x/y und x'/y' in dieser Reihe zwei aufeinanderfolgende Brüche, dann ist $x'y - xy' = 1$. Zu jeder irrationalen Zahl a gibt es unter den Brüchen der Farey-Reihe n-ter Ordnung einen, etwa x/y, der sich der Zahl a bis auf den Fehler $1/(y\,n)$ nähert. Für diese Tatsachen wurde der geometrische Beweis vorgetragen, der die Deutung der Brüche x/y als Punkte der Ebene mit Koordinaten (x, y) verwendet. (Vergleiche zum Beispiel das Buch von Hardy und Wright, *Theory of Numbers*). Dieser anschauliche Beweis ist vielleicht geeignet, diese einfachen Tatsachen auch dem Mittelschulunterricht nutzbar zu machen.

K. Prachar, Wien.

Zur Frage der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Schule

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung spielt heute in unseren Mittelschulen eine kümmerliche Rolle. Entweder wird sie gänzlich außer acht gelassen oder man bespricht nach Einführung der Laplaceschen Definition (LD.) eine Reihe von Aufgaben, welche ausschließlich den Glücksspielen entnommen sind. Damit wird man zwar der historischen Entstehung der Disziplin gerecht, der sachliche und erkenntnistheoretische Wert jedoch ist unseres Erachtens praktisch gleich Null. In den letzten zwanzig Jahren haben sich aber wahrscheinlichkeitstheoretische Überlegungen in einem solchen Ausmaß insbesondere in den Naturwissenschaften, aber auch in der Nationalökonomie und Psychologie als notwendig erwiesen, daß es sehr wünschenswert erschiene, wenn der Maturand wenigstens «den Geist der Wahrscheinlichkeitsrechnung» begriffen hat. Es soll nun kurz auseinandergesetzt werden, warum dies die auf der LD. aufgebaute Theorie kaum leisten kann. Es ist heute unbestritten, daß die Mathematik den Charakter eines hypothetisch-deduktiven Systems hat, also ist es klar, daß die Sätze der Mathematik nichts über die Welt aussagen, und die Anwendung derselben geschieht denn auch mittels Begriffen und Sätzen, welche der Erfahrung entstammen. Dies wurde und wird aber für die Wahrscheinlichkeitsrechnung vielfach übersehen, weil hier die Anwendung scheinbar unmittelbar geschieht. In Wirklichkeit handelt es sich aber um zwei verschiedene Dinge: Einerseits um eine axiomatische Theorie, die Wahrscheinlichkeitsrechnung der Mathematik, anderseits um eine Erfahrungstatsache, nämlich das Auftreten empirisch konstatierbarer Gesetzmäßigkeiten bei Massenerscheinungen. Somit hat auch die Kritik der LD. von zwei Seiten her zu erfolgen. Die Laplacesche Erklärung führt die auftretenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf den Begriff der Gleichverteilung zurück. Kontinuierliche Verteilungen zum Beispiel können unseres Erachtens innerhalb dieser Definition nicht einwandfrei erklärt werden. Anderseits gibt die LD. nur scheinbar eine Anweisung zur unmittelbaren Berechnung von Elementarwahrscheinlichkeiten. Für die Anwendung muß man die Hauptsache der Erfahrung entnehmen, nämlich das Bestehen der Gleichverteilung. Vom Standpunkt des Mathematikers ist die Definition also viel zu eng und, wie MISES zuerst klar aufgezeigt hat, ist man jedenfalls in ihren Anwendungen auf die Beobachtungen von Häufigkeiten für das Auftreten der Merkmale in Versuchsreihen angewiesen. Tatsächlich betreibt man also auf der Schule nicht Wahrscheinlichkeitsrechnung, sondern übt höchstens Kombinatorik.

Es ist bekanntlich bisher nicht gelungen, die Häufigkeitstheorie von MISES in mathematisch völlig befriedigender Form zu fassen. Der, wie uns scheint, in jeder Beziehung einwandfreie Weg, die Wahrscheinlichkeitstheorie axiomatisch aufzubauen, führt über die Maßtheorie. Bevor kurz hierauf eingegangen bzw. die Möglichkeit erörtert wird, davon auch in der Schule Gebrauch zu machen, soll nochmals darauf hingewiesen werden, daß der Mathematiker nur angibt, welchen Rechengesetzen er die Wahrscheinlichkeiten unterwirft, jedoch keine Handhabe zur Berechnung der Elementarwahrscheinlichkeiten selbst bieten kann. Der natürlichste Weg hiezu ist wohl die «Häufigkeitsinterpretation», welche vom Experiment zur Anwendung der Theorie führt: Man beobachtete in einer Reihe möglichst gleichartiger Versuche die Häufigkeit des Auftretens eines bestimmten Ereignisses (zum Beispiel die Häufigkeit einer 6 innerhalb einer Serie von Würfen). Wiederholt man die Versuchsreihen, läßt sich empirisch konstatieren, daß die relative Häufigkeit des betrachteten Ereignisses um einen festen Wert schwankt, und diese Schwankungen um so geringfügiger erscheinen, je ausgedehnter die Versuchsreihen sind. Diesen festen Wert kann man als die Wahrscheinlichkeit des betreffenden Ereignisses ansehen, deren (approximative) Bestimmung also nur über die Erfahrung möglich ist. Die Häufigkeitsinterpretation gibt uns auch einen Fingerzeig für den axiomatischen Aufbau der Theorie, wenngleich dieser in logischer Hinsicht natürlich völlig unabhängig davon ist. Das mathematische Gerüst sieht nun in einer vielleicht für die Schule brauchbaren Gestalt so aus: A, B seien zwei Ereignisse. Dann soll das Ereignis, welches im Auftreten mindestens eines der Ereignisse A oder B besteht, durch $A+B$ bezeichnet werden, das Ereignis, welches im Auftreten sowohl von A als auch von B besteht, durch AB gekennzeichnet werden.

1. Der Wert einer Wahrscheinlichkeit ist eine Zahl zwischen 0 und 1.
2. Die Wahrscheinlichkeit eines sicherlich eintretenden Ereignisses ist 1, die eines unmöglichen Ereignisses 0.
3. Die Ereignisse A und B heißen unabhängig, wenn für ihre Wahrscheinlichkeiten die Relation besteht: $W(AB) = W(A)\ W(B)$.
4. Wenn A und B unabhängig sind, dann gilt für die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von $A+B$ (innerhalb ein und derselben Beobachtungsreihe)

$$W(A+B) = W(A) + W(B).$$

Im Anschluß hieran sei darauf hingewiesen, daß ausschließlich die Häufigkeitsinterpretation die Möglichkeit gibt, zwei empirisch gegebene Ereignisse als unabhängig zu erkennen. Von diesen Grundsätzen ausgehend, bietet es offenbar keinerlei Schwierigkeiten mehr, die Verteilungsfunktion als Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $W(\xi \leqq x)$ einzuführen.

Dies ist auch im wesentlichen der Wahrscheinlichkeitsbegriff, welcher der modernen mathematischen Statistik zugrunde liegt. Wir sehen nun die Aufgabe der mathematischen Statistik darin, daß sie empirisch gegebene Tatsachen idealisierend so umformt, daß sie der mathematischen Theorie zugänglich werden und das Ergebnis in eine solche Form kleidet, welche mittels der Häufigkeitsinterpretation einen Schluß auf die Tatsachen zuläßt. Dies ist wohl der Standpunkt, den der führende Wahrscheinlichkeitstheoretiker und Statistiker CRAMER in den *Mathematical Methods of Statistics* (Princeton University Press, 1946) einnimmt. L. SCHMETTERER, Wien.

Anmerkung der Redaktion: Wir erinnern im Anschluß an die obigen Betrachtungen an die Abhandlung von P. FINSLER: *Über die mathematische Wahrscheinlichkeit*, El. Math. *2*, Nr. 6, 108 (1947).

Zum Lehrplan in Mathematik

Wir müssen heute, wie schon öfters in der Geschichte, unseren Lehrplan wieder erneuern, um ihn den geänderten Zeitbedürfnissen anzupassen.

Warum ist Mathematik oft ein unbeliebter und gefürchteter Gegenstand? Welche Abhilfe ist möglich? Die Entfernung der mathematischen Begriffswelt von der Gedankenwelt des Durchschnitts ist größer als bei anderen Fächern. Mathematik behandelt Quantitäten ohne Qualität und Formen ohne Farbe. Viele Schüler können die daraus entspringenden Schwierigkeiten nur mit besonderer Führung und Hilfe meistern. Mathematik erleichtert ferner eine genauere Leistungskontrolle, welche Mängel rasch nachzuweisen, allerdings auch gute Erfolge zu würdigen ermöglicht. Sie zwingt zu lückenloser Mitarbeit. Unbeliebtheit und Angst sind vielfach Formen unbewußt schlechten Gewissens. Weite Kreise verstehen nicht, warum man Mathematik lernen soll, ohne sie für den Beruf zu brauchen. Sie wünschen nur «Praktisches» zu lernen. Nicht jeder Schüler muß von Anfang an Vergnügen an jedem Lehrfach finden, aber die Mehrheit sollte hinterher den Eindruck behalten, daß es für sie einen Wert gehabt hat.

Im allgemeinen wäre vom Lehrplan zu fordern: Möglichst wenig Änderungen, bevor das Neue nicht ausgereift und endgültig ist, damit die regelmäßige Arbeit der Schule nicht unnötig gestört wird. Nicht alle Maßnahmen zur Verbesserung des Unterrichtes müssen im Lehrplan festgelegt werden. Er soll oft nur eine Mindestnorm zur Sicherung eines gewissen Gleichschrittes aller Schulen eines Landes geben. Einigkeit besteht heute darüber, daß unser Lehrplan, teilweise auch zur Gewinnung von Spielraum für neue Bildungsziele, durch Kürzungen entlastet werden soll, Meinungsverschiedenheit jedoch über die Art der Abstriche. Einen Lehrplan zwischen den Interessengruppen auszuhandeln ist ungünstig, weil beim Durchkämpfen des eigenen Standpunktes der Blick auf das Ganze leicht verlorengeht. Moralische Berechtigung haben ja nicht solche Gegenstände, die von den einzelnen Fächern aus wichtig erscheinen, sondern jene, die dem Gesamtzweck der Schule dienen. Ein Kompromiß zwischen den Vertretern verschiedener Fächer bringt leicht ein geistiges Mosaik. Besser wäre es, Grundsätze für den Lehrplan zu diskutieren, die über die Enge des Fachinteresses hinaus den Gesamtzweck der Schule im Auge behalten. Für Mathematik könnten folgende Grundsätze zur neuen Stoffabgrenzung gelten: 1. Der von fachlicher Seite mehrfach vorgeschlagene Ersatz überalteter Stoffteile durch zeitgemäßere. 2. Nicht eine besondere Wissensmenge, sondern tragfähige Grundlagen: Grundbegriffe und Verfahren, numerisches und algebraisches Rechnen, funktionales Denken, Schulung der Raumauffassung durch Konstruktion und Abbildung! 3. Der Lehrstoff soll nicht nur für gewisse Berufe, sondern für alle Schüler Bildungswert haben. Auf der Unterstufe die Mathematik des täglichen Lebens, auf der Oberstufe höhere Mathematik zur formalen Geistesschulung, dann aber psychologisch sorgfältig angemessen, damit sie leichter verarbeitet wird. 4. Abrundung, nicht Zerreißung des Lehrstoffes! Als Kerngebiete müßten bleiben: Algebra, analytische Geometrie, Infinitesimalrechnung, Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie. Als isoliert könnten entfallen: Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und vielleicht Reihenrechnung.

Die Wünsche der Fachvertreter nach Hebung des Niveaus und die der Pädagogen nach Rücksicht auf die Mehrheit der Schüler, die anders als mathematisch begabt ist, stehen einander gegenüber. Der bisherige Kompromiß auf mittlerer Linie hat beide Seiten nur halb befriedigt. Vielleicht wäre es günstiger, im Mathematikunterricht die dafür Begabten von den anderen durch zwei Kurse mit verschiedenen Anforderungen zu trennen. E. WEINMEISTER, Graz.

Literaturüberschau

Naturforschung und Medizin in Deutschland 1939–1946

Band 5–7, *Angewandte Mathematik*, Dieterichsche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden 1948

Die von A. WALTHER herausgegebenen Bände über angewandte Mathematik lassen wie diejenigen über reine Mathematik[1]) die große Arbeit erkennen, die die deutsche mathematische Forschung trotz und zum Teil wegen des Krieges geleistet hat. Wir geben wieder die Titel der einzelnen Abschnitte und ihre Bearbeiter an.

Band 5: Ideale Flüssigkeiten (H. GÖRTLER); Zähe Flüssigkeiten (H. GÖRTLER); Turbulenz (H. GÖRTLER); Gasdynamik (R. SAUER); Wärmeübergang (K. WIEGHARDT); Tragflügel, Propeller, Pumpen und Turbinen (K. WIEGHARDT); Hydraulik (K. KARAS); Mechanische Ähnlichkeit (L. SCHILLER).

Band 6: Mathematische Grundlagen der Geodäsie (R. KÖNIG); Stand der Geodäsie in Deutschland (M. KNEISSL).

Band 7: Kinematik (K. HAIN und W. MEYER ZUR CAPELLEN); Entwicklung der Rechengetriebetechnik (H. BUECKNER); Geometrische Optik einschließlich Beugung und Interferenz (G. FRANKE); Kristallgeometrie (C. HERMANN); Anwendungen der Mathematik in der Elektrotechnik (A.-W. KRON); Elektromagnetische Wellen in Hohlleitern und verwandte Probleme (H. BUCHHOLZ); Mathematische Methoden der Geophysik (J. BARTELS); Mathematische Methoden der Astronomie (K. SCHÜTTE); Mathematische Außenballistik (H. ATHEN); Theorie der Splitterwirkung (H. POLTZ); V-2-Ballistik (R. ZURMÜHL); Mathematische Innenballistik (J. STRECKE); Kreiselgeräte (K. BEYERLE); Reibung bei Kreiselgeräten (F. GOTTWALD). *E. Trost.*

Neuere spanische mathematische Literatur

Wir erhalten aus Madrid eine Reihe von Werken, die Zeugnis von der regen mathematischen Arbeit in Spanien ablegen. Vor allem hat das Mathematische Institut «*Jorge Juan*» in Madrid eine bedeutende Tätigkeit entfaltet. Es ist uns wegen Raummangels leider nicht möglich, hier auf den Inhalt näher einzugehen, jedoch freuen wir uns, unseren nichtspanischen Lesern wenigstens zur Kenntnis zu bringen, was an Literatur vorliegt. Bei sich bietender Gelegenheit werden wir auch den Inhalt aus besonders interessierenden Abhandlungen besprechen. (Interessenten in der Schweiz können die Werke von uns zur Einsicht erhalten.) L. LOCHER-ERNST.

Unter dem Titel *Consejo superior de investigaciones cientificas* liegen vor als «Publicaciones del Instituto Jorge Juan de Matematicas (Madrid)»:

J. A. SANCHEZ PEREZ: *La Aritmetica en Babilonia y Egipto* (1943).
J. A. SANCHEZ PEREZ: *La Aritmetica en Grecia* (1947).
E. LINÉS ESCARDÓ: *Aplicaciones de la teoria de redes regulares al estudio de las funciones cuasiperiodicas* (1943).
SIXTO RIOS: *La prolongacion analitica de la integral de Dirichlet-Stieltjes* (1944).

[1]) Vgl. El. Math. *5*, 92 (1950).