

# Kleine Mitteilungen

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **6 (1951)**

Heft 6

PDF erstellt am: **09.08.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*  
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

Örter nicht nur aus einem Kegelschnitt, sondern noch aus der doppelt gezählten Ferngeraden bestehen. Führt man in (2) homogene kartesische Koordinaten

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0} \quad (21)$$

ein, so lautet (2)

$$\pm \sqrt{(x_1 - e x_0)^2 + x_2^2} \pm \sqrt{(x_1 + e x_0)^2 + x_2^2} = 2 a x_0.$$

Hieraus folgt durch zweimaliges Quadrieren

$$x_0^2 [a^2 (e^2 - a^2) x_0^2 + (a^2 - e^2) x_1^2 + a^2 x_2^2] = 0. \quad (22)$$

Der volle geometrische Ort (1) besteht daher aus dem Kegelschnitt (3) und aus der doppelt gezählten Ferngeraden  $x_0 = 0$ . Für die Punkte der Ferngeraden ist die Relation  $|d_1 - d_2| = 2a$  in der Weise erfüllt, daß  $d_1$  und  $d_2$  unendlich groß sind und ihre Differenz unbestimmt wird<sup>1)</sup>.

Dies ist von Bedeutung, wenn man den Ansatz (1) auf  $n$  Brennpunkte  $F_1, F_2, \dots, F_n$  in der Ebene oder im Raum erweitert und nach dem Ort der Punkte fragt, für die

$$\pm d_1 \pm d_2 \pm \dots \pm d_n = n a \quad (a \text{ konstant, natürliche Zahl } n) \quad (23)$$

ist.  $n = 1$  ergibt den Kreis bzw. die Kugel um  $F_1$  mit dem Radius  $a$ ,  $n = 2$  ergibt einen Kegelschnitt bzw. eine Drehfläche zweiten Grades, dazu die doppelt gezählte Ferngerade bzw. Fernebene. Für  $n = 3$  ergibt sich eine Kurve bzw. Fläche achter Ordnung<sup>2)</sup>. Für  $n = 4$  erhält man eine Kurve bzw. Fläche 10. Ordnung<sup>3)</sup>, dazu die sechsfach gezählte Ferngerade bzw. Fernebene. Allgemein bedeutet (23) für ungerades  $n$  eine Kurve bzw. Fläche von der Ordnung  $2^n$ . Für gerades  $n$  spaltet sich die Ferngerade bzw. Fernebene ab, und es bleibt eine Kurve bzw. Fläche von der Ordnung

$$2^n - \binom{n}{n/2}.$$

FRITZ HOHENBERG, Graz.

## Kleine Mitteilungen

### I. Bemerkung zur elementaren Konvergenzlehre

In vielen Darstellungen der Theorie der konvergenten Zahlfolgen stößt man auf eine gewisse Unklarheit, die ihren Grund darin hat, daß der Begriff des Häufungspunktes in nicht ganz angemessener Weise gebraucht wird. Bei näherem Zusehen kann man feststellen, daß dieser unangemessene Gebrauch verursacht wird durch die Gepflogenheit, eine Zahlfolge als Spezialfall einer Punktmenge zu interpretieren. Diese Interpretation ist aber nicht genau zutreffend und erzeugt eine leichte Verwirrung, die gerade einem kritischen Anfänger Unbehagen bereiten kann.

<sup>1)</sup> Analog besteht der geometrische Ort (1) in der nichteuklidischen Geometrie aus einem Kegelschnitt und dem absoluten Kegelschnitt.

<sup>2)</sup> Siehe F. HOHENBERG, *Eine einfache Fläche 8. Ordnung*, Mh. Math. 54, 140–156 (1950). Es zeigt sich unter anderem, daß diese Fläche durch die sogenannte Darboux'sche Verwandtschaft mit der bekannten Steinerschen Fläche vierter Ordnung zusammenhängt.

<sup>3)</sup> Eine Untersuchung dieser Fläche soll demnächst erscheinen.

Ich will daher kurz erläutern, wie sich diese Unklarheit im Unterricht vermeiden läßt. Die Hauptsache ist, daß man in den primären Definitionen die erforderlichen Unterscheidungen trifft. Ich beschränke mich dabei auf reelle Zahlen bzw. lineare Punktmengen.

Definition 1: *Eine Zahlfolge entsteht dadurch, daß man jeder natürlichen Zahl  $n$  eine reelle Zahl  $a_n$  zuordnet.*

Eine Zahlfolge ist also keine Menge, sondern genaugenommen eine zahlentheoretische Funktion.

Eine Zahlfolge ist etwas werdendes im Gegensatz zu einer Menge, die als etwas Seiendes vorgestellt wird. Ich halte es für didaktisch förderlich, wenn man in den Formulierungen den anschaulichen Vollzug der Zahlfolge im Laufe der Zeit, das Herausstechen ihrer Glieder auf der Zahlenachse, zum Ausdruck bringt.

Eine Zahlfolge induziert nun offenbar eine Punktmenge, nämlich die Punkte, die insgesamt herausgestochen werden.

Eine Zahlfolge «enthält» nach Definition unendlich viele «Glieder». Die induzierte Menge kann aber endlich sein, im äußersten Fall sogar aus einem Punkt bestehen. Es ist sehr ungünstig, diese wichtigen Spezialfälle durch voreilige Verwendung des Begriffs vom Häufungspunkt auszuschließen. Vielmehr empfiehlt sich folgende

Definition 2: *Ein Punkt  $a$  heißt **Grenzpunkt**<sup>1)</sup> einer Zahlfolge  $(a_n)$ , wenn in jeder Umgebung von  $a$  unendlich viele Glieder der Folge fallen.*

Man könnte zur Not auch sagen: «... Glieder liegen». Doch ist das weniger anschaulich, denn wenn die Glieder schon liegen, kann man nicht mehr unterscheiden, ob zwei aufeinandergefallen sind.

Nun ergibt sich durch bekannte Intervallschachtelung der

Satz 1: *Ist eine Zahlfolge beschränkt, so besitzt sie mindestens einen Grenzpunkt.*

Bevor ich weitergehe, mache ich darauf aufmerksam, daß ich den Begriff der reellen Zahl, etwa gestützt auf Dedekindsche Schnitte, schon vorausgesetzt habe. Es bedeutet daher keinen Zirkel, wenn ich jetzt übergehe zu

Definition 3: *Eine Zahlfolge heißt **konvergent**, wenn sie beschränkt ist und genau einen Grenzpunkt hat.*

Von Wichtigkeit für die konkrete Handhabung von Folgen ist weiter

Definition 4: *Eine «Teilfolge»  $(a_{n_p})$  einer Zahlfolge  $(a_n)$  wird dadurch gebildet, daß man eine monoton wachsende Folge von Indizes*

$$n_1 < n_2 < \dots < n_p < \dots$$

ausliest.

Es muß eben das Zurückspringen verhindert werden.

Nun folgen die bei Beweisen am häufigsten verwendeten Sätze.

Satz 2: *Konvergiert eine Zahlfolge  $(a_n)$  gegen  $a$ , so konvergiert auch jede ihrer Teilfolgen gegen  $a$ .*

Satz 3: *Besitzt eine Folge  $(a_n)$  einen Grenzpunkt  $a$ , so kann man aus ihr eine Teilfolge  $(a_{n_p})$  ausziehen, die gegen  $a$  konvergiert.*

Jetzt kann man die Konvergenzlehre entwickeln, ohne vom Begriff des Häufungspunktes Gebrauch zu machen. Derselbe muß erst dort eingeführt werden, wo er wirklich hingehört, nämlich bei der Analyse von vorgegebenen Punktmengen, zum Beispiel Definitionsbereichen oder Wertevorräten.

Im ganzen ergibt sich eine gewisse Erweiterung der gesamten Beweisführung, die sich aber aus Gründen der Durchsichtigkeit und auch in einzelnen Details wohl lohnen dürfte.

W. Scherrer, Bern.

## II. Quadrilatère inscrit

Construire un quadrilatère inscrit connaissant deux côtés opposés  $a$  et  $c$ , le point d'intersection  $E$  de leurs prolongements, et la somme des angles  $\alpha$  et  $\beta$  adjacents à l'un d'eux.

<sup>1)</sup> Über die Zweckmäßigkeit dieses Namens kann man natürlich verschiedener Meinung sein.

Supposons le problème résolu et soit  $ABCD$  un quadrilatère, inscrit dans un cercle de centre  $O$ , dans lequel on connaît les côtés  $AB = a$  et  $CD = c$ , la somme des angles  $DAB = \alpha$  et  $ABC = \beta$  et le point d'intersection  $E$  déterminé par le prolongement des côtés,  $a$  et  $c$ .

Prolongeons  $\overline{AD}$  et  $\overline{BC}$  jusqu'à leur point d'intersection  $F$ .

En remarquant que le côté  $\overline{CD}$  reste constant lorsque  $F$  décrit le segment de cercle capable de l'angle  $\gamma$ , supplément de la somme des angles  $\alpha + \beta$ , avec  $\overline{AB}$  pour corde, on est conduit à la construction suivante:

1° Décrire sur  $\overline{AB}$  comme corde le segment de cercle  $AMB$  capable de l'angle  $\gamma$ .

2° Construire les triangles isocèles  $ABG$  et  $HJG$ ;  $G$  est le milieu de l'arc  $AMB$ ,  $H$  est sur le côté  $AG$  et  $J$  sur le côté  $BG$ ; le côté  $\overline{HJ}$  est égal au côté  $\overline{CD}$ .

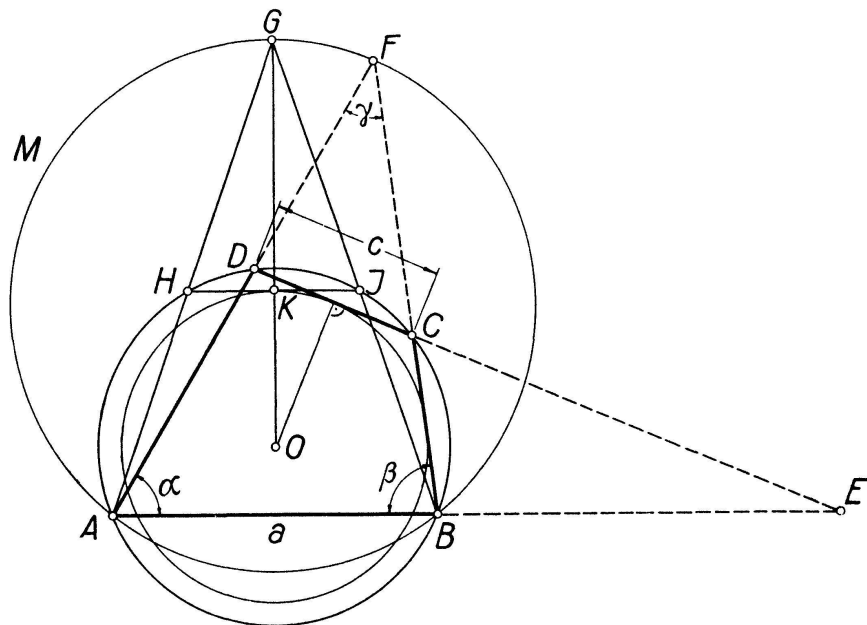


Fig. 1

3° Tracer le cercle circonscrit au trapèze isocèle  $ABJH$  dont le centre sera désigné par  $O$ .

4° Mener  $\overline{OK}$  perpendiculaire à  $HJ$  et décrire la circonférence de centre  $O$  et de rayon  $OK$ .

5° Mener par  $E$  la tangente à cette circonférence dont les intersections avec le cercle circonscrit déterminent les sommets  $C$  et  $D$ .

*Remarque:* Au lieu de donner le point d'intersection  $E$  des deux côtés opposés  $AB$  et  $CD$ , on pourrait donner par exemple la diagonale  $AC$ , les autres données n'étant pas modifiées.

*Théorème:* Dans tout quadrilatère inscrit, les segments déterminés par l'une des diagonales sur l'autre sont entre eux comme le produit des côtés aboutissant à l'extrémité de ces segments.

*Démonstration*

Soient  $ABCD$  le quadrilatère inscrit et  $E$  le point d'intersection des diagonales.

Désignons  $\overline{AB}$  par  $a$ ,  $\overline{BC}$  par  $b$ ,  $\overline{CD}$  par  $c$ ,  $\overline{DA}$  par  $d$ ,  $\overline{BD}$  par  $e$ ,  $\overline{AC}$  par  $f$ ,  $\overline{BE}$  par  $m$ ,  $\overline{ED}$  par  $n$ ,  $\overline{AE}$  par  $r$  et  $\overline{EC}$  par  $s$ .

Les triangles semblables  $ABE$  et  $CDE$  d'une part et  $AED$  et  $BCE$  d'autre part donnent les proportions:

$$\frac{r}{n} = \frac{m}{s} = \frac{a}{c}, \quad \frac{r}{m} = \frac{n}{s} = \frac{d}{b}.$$

En divisant membre à membre les proportions formées par les deux derniers rapports d'une part et en multipliant membre à membre les proportions formées par le premier

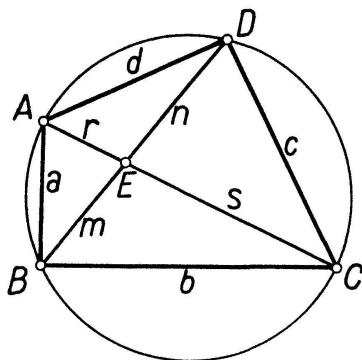


Fig. 2

et le troisième rapport d'autre part et en tenant compte de la relation  $m n = r s$ , on obtient respectivement

$$\frac{a b}{c d} = \frac{m}{n}, \quad \frac{a d}{b c} = \frac{r}{s}.$$

*Corollaire.* A partir de ces deux relations, formons une nouvelle proportion dont les termes d'un des rapports soient les diagonales  $e$  et  $f$  du quadrilatère en question

$$\frac{a b + c d}{c d} : \frac{a d + b c}{b c} = \frac{m + n}{n} : \frac{r + s}{s},$$

et après avoir remarqué que  $m + n = e$ ,  $r + s = f$  et que  $s d = n b$ , il reste

$$\frac{a b + c d}{a d + b c} = \frac{e}{f}$$

et l'on retrouve un théorème connu.

*Remarque:* Des relations analogues peuvent être obtenues en considérant la figure obtenue en prolongeant par exemple les côtés  $\overline{BC}$  et  $\overline{AD}$  jusqu'à leur point d'intersection.  
G. BILGER, Genève.

### III. Sulla periodicità di una particolare corrispondenza tra rette di un fascio

1. A base di alcune trasformazioni di curve piane, H. LORENTZ<sup>1)</sup> pone la seguente corrispondenza tra rette di un fascio. Si consideri una involuzione in un fascio di rette, il cui piano sia orientato; e alla retta  $p$  corrisponda la  $p'$ . A  $p'$  si faccia poi corrispondere la  $p_1$  che forma con essa (nel verso stabilito) l'angolo  $\alpha$ . Si ha così la corrispondenza  $(p, p_1)$ .

Con la potenza ennesima di questa corrispondenza, alla retta  $p$  corrisponde la retta  $p_n$ . E se la corrispondenza è periodica di grado  $n$  dev'essere  $p_n = p$ .

<sup>1)</sup> H. LORENTZ, *Transformations de courbes planes*, An. Fac. Ciências Porto 26, 6-20 e 65-83 (1941); 31, 129-144 (1946); 33, 82-95 (1948).

H. LORENTZ studia i casi  $n = 1, 2, 3, 4$ , ma non riesce — come dichiara — a stabilire in generale la condizione di periodicità. Tale condizione viene qui trovata.

2. Assumendo nel fascio, e in modo conveniente, coordinate tangenti, sia

$$A m m' + B = 0$$

l'equazione dell'involuzione, con  $m$  e  $m'$  coordinate di  $p$  e  $p'$ . Detta  $m_1$  la coordinata tangente di  $p_1$ , la corrispondenza  $(p, p_1)$  è regolata dalla

$$m_1 = \frac{\lambda A m - B}{A m + \lambda B}$$

con  $\lambda = \text{tg} \alpha$ . La sostituzione

$$\Phi = \left\| \begin{array}{cc} \lambda A & -B \\ A & \lambda B \end{array} \right\|$$

ha per modulo

$$\delta = \left| \begin{array}{cc} \lambda A & -B \\ A & \lambda B \end{array} \right| = (\lambda^2 + 1) AB;$$

mentre l'invariante diagonale è

$$2 \gamma = \lambda (A + B).$$

Vale la relazione di CAYLEY

$$\Phi^2 - 2 \gamma \Phi + \delta = 0.$$

E la potenza ennesima di  $\Phi$  è data da<sup>1)</sup>

$$\Phi^n = \left\| \begin{array}{cc} U_{n+1} - \lambda B U_n & -B U_n \\ A U_n & U_{n+1} - \lambda A U_n \end{array} \right\|$$

con

$$U_n = \sum_{r=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^r \binom{n-r-1}{r} (2 \gamma)^{n-2r-1} \delta^r, \quad U_0 = 0, \quad U_1 = 1.$$

Allora

$$m_n = \frac{(U_{n+1} - \lambda B U_n) m - B U_n}{A U_n m + U_{n+1} - \lambda A U_n}.$$

Nel caso della periodicità, la  $m_n = m$  conduce alla condizione

$$U_n [A m^2 + \lambda (B - A) m + B] = 0.$$

E supposto  $n > 1$  si ha  $U_n = 0$ .

D'altra parte la  $U_n = 0$  si può scrivere

$$[\sqrt{AB} (\lambda^2 + 1)]^{n-1} \sum_{r=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^r \binom{n-r-1}{r} \left[ \frac{(A+B)\lambda}{\sqrt{AB} (\lambda^2 + 1)} \right]^{n-2r-1} = 0$$

ovvero

$$[\sqrt{AB} (\lambda^2 + 1)]^{n-1} \sum_{r=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^r \binom{n-r-1}{r} \left[ \frac{A+B}{\sqrt{AB}} \text{sen} \alpha \right]^{n-2r-1} = 0.$$

<sup>1)</sup> L. TOSCANO, *Sulle potenze di una matrice del secondo ordine*, Rend. Accad. naz. Lincei, Cl. Sci. fis. mat. nat. [6] 23, 493-495 (1936).

E poichè l'equazione di grado  $n - 1$

$$\sum_{r=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^r \binom{n-r-1}{r} x^{n-2r-1} = 0$$

ha le radici

$$x_k = 2 \cos \frac{k \pi}{n}, \quad (k = 1, 2, \dots, n - 1)$$

la nostra precedente è soddisfatta da

$$\text{sen } \alpha = \frac{2\sqrt{AB}}{A+B} \cos \frac{k \pi}{n}. \quad (k = 1, 2, \dots, n - 1)$$

Rimandiamo alla prima citata comunicazione di H. LORENTZ per i casi  $n = 1, 2, 3, 4$ . E concludiamo che la condizione generale di periodicità ennesima è data da

$$\text{sen}^2 \alpha = \frac{4AB}{(A+B)^2} \cos^2 \frac{k \pi}{n}.$$

Se  $A = B$ ,  $\alpha$  è commensurabile con  $\pi$ .

LETTERIO TOSCANO, Messina (Italia).

IV. Beweis des Lehrsatzes des Ptolemäus mit Hilfe des Vergleichens von Flächen

Wir sprechen den Satz in der für unsere Zwecke brauchbaren Form aus:

Die Summe der beiden rechtwinkligen Parallelogramme, die man mit den Gegenseiten eines konvexen Sehnenvierecks als Anseiten bilden kann, ist jenem Parallelo-

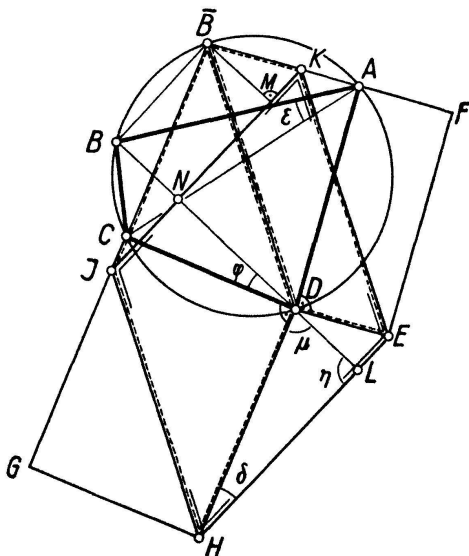


Fig. 1

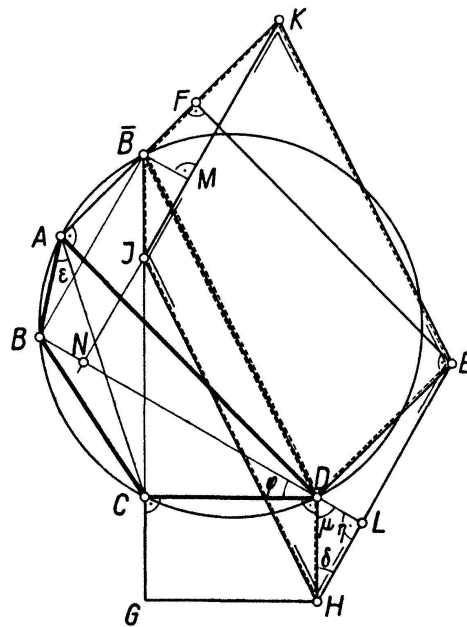


Fig. 2

gramm flächengleich, dessen eine Seite gleich einer Diagonale und die zugehörige Höhe gleich der anderen Diagonale des Sehnenvierecks ist.

$ABCD$  sei das konvexe Sehnenviereck, ferner  $ADEF$  das eine,  $CDHG$  das andere der rechtwinkligen Parallelogramme, von denen im Satz die Rede ist. Es ist also insbesondere  $\sphericalangle ADE = 90^\circ$  und  $DE = BC$  sowie  $\sphericalangle CDH = 90^\circ$  und  $DH = AB$ . Es sei  $\bar{B}$  der Schnittpunkt der Geraden  $AF$  und  $CG$ . Offensichtlich sind, abgesehen von Grenzfällen, für die Lage von  $\bar{B}$  zwei Möglichkeiten vorhanden: entweder kommt  $\bar{B}$  gleichufrig (Figur 1) oder wechselufrig (Figur 2) mit  $B$  bezüglich der Geraden  $AC$  zu liegen.

$\bar{BD}$  wird nun sowohl von  $A$  als auch von  $C$  aus je unter einem rechten Winkel gesehen, daher ist  $\bar{BD}$  Durchmesser des durch  $A, C$  und  $D$  gehenden Kreises. Dieser Kreis ist aber mit dem Umkreis des Sehnenvierecks identisch, das heißt  $\bar{B}$  muß auf dem Umkreis des Sehnenvierecks  $ABCD$  liegen.

Nun ziehe man  $HJ$  und  $EK$  je parallel zu  $D\bar{B}$ ; es ergibt sich

$$ADEF + DCGH = DEK\bar{B} + DHJ\bar{B} = HDEK\bar{B}J.$$

Verbindet man noch  $H$  mit  $E$ , so erhält man ein dem  $\triangle J\bar{B}K$  kongruentes  $\triangle HDE$ . Folglich ist  $HDEK\bar{B}J =$  Parallelogramm  $HEKJ$ ; somit  $ADEF + DCGH = HEKJ$ .

Aber die Dreiecke  $HDE$  und  $ABC$  sind ebenfalls kongruent, weil der Winkel bei  $D$  den Viereckswinkel bei  $D$  zu  $180^\circ$  ergänzt, also gleich  $\beta$  ist. Daher besitzt  $HE$  die Länge der Diagonalen  $AC$ .

Es bleibt noch zu beweisen, daß die zugehörige Parallelogrammhöhe gleich der Diagonalen  $BD$  ist. Aus  $\varphi = \varepsilon$  (gleichufrige Peripheriewinkel über demselben Bogen) und  $\delta = \varepsilon$  (Kongruenz der Dreiecke  $HDE$  und  $ABC$ ) folgt nämlich  $\varphi = \delta$ , aber  $\mu = 90^\circ - \varphi$ , also  $\mu + \delta = 90^\circ$ , somit  $\eta = 90^\circ$ . Das heißt:  $BD \perp HE$ , also auch  $BD \perp KJ$ . Nun ist auch  $\bar{B}B \perp BD$ , also  $\bar{B}B \parallel KJ$ , folglich  $\bar{B}M = DL = BN$ , also

$$NL = BL - BN = BL - DL = BD,$$

was zu beweisen war.

VIKTOR KRAKOWSKI, Zürich.

### V. Über die Teilersumme der Zahlen von der Form $2^\alpha p^l$

$S(n)$  sei die Teilersumme von  $n$ . Es gilt:

Satz 1. Ist  $S(2^\alpha p)/2$  größer bzw. kleiner als  $2^\alpha p$ , so ist  $S(2^\alpha p^l)/2$  auch für alle  $l > 1$  größer bzw. kleiner als  $2^\alpha p^l$ ; ist  $S(2^\alpha p)/2 = 2^\alpha p$ , so gilt  $S(2^\alpha p^l)/2 > 2^\alpha p^l$  für  $l > 1$ .

Beweis. Aus  $S(n)/2 \cong n$ ,  $n = \prod p_i^{l_i}$ , folgt allgemein

$$\frac{1}{2} \prod \frac{p_i}{p_i - 1} \cong \prod \frac{p_i^{l_i + 1}}{p_i^{l_i + 1} - 1}. \tag{1}$$

Die rechte Seite von (1) ist eine monoton abnehmende Funktion der  $l_i$ ; damit ist die Behauptung für «>» bewiesen.

Nach (1) ist ferner  $S(n)/2 < n$  für  $n = 2^\alpha p^l$  gleichbedeutend mit

$$\frac{p}{p-1} < \frac{2^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}-1} \cdot \frac{p^{l+1}}{p^{l+1}-1}.$$

Dies gilt für alle  $l$ , wenn  $p: (p-1) < 2^{\alpha+1}:(2^{\alpha+1}-1)$ , also  $p > 2^{\alpha+1}$  ist.

Für  $p = 2^{\alpha+1}-1$  ist  $n = 2^\alpha p$  vollkommen, das heißt  $S(2^\alpha p)/2 = 2^\alpha p$ .

Endlich gilt  $S(2^\alpha p)/2 > 2^\alpha p$  nach (1), wenn schon

$$\frac{p}{p-1} > \frac{2^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}-1} \cdot \frac{p^2}{p^2-1},$$

also  $p < 2^{\alpha+1}-1$  ist. Es gilt also auch der verschärfte Satz 2:



Satz 2. Ist  $n = 2^\alpha p^l$ , so gilt

$$\frac{1}{2} S(n) < n \quad \text{für } p > 2^{\alpha+1} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} S(n) \geq n \quad \text{für } p < 2^{\alpha+1},$$

wobei der Fall  $S(n)/2 = n$  nur für  $p = 2^{\alpha+1} - 1$ ,  $l = 1$  eintritt.

G. Szász, Szeged (Ungarn).

## Aufgaben

**Aufgabe 103.** Démontrer que les équations suivantes ont une infinité de solutions en nombres naturels distincts  $x, y, z$ :

a)  $x^n + y^n = z^{n-1}$  ( $n$  naturel  $> 1$ ),    b)  $x^n + y^n = z^{n+1}$  ( $n$  naturel),    c)  $x^3 + y^3 = z^5$ .

W. SIERPIŃSKI, Varsovie.

*Solution:* We may state the following result: If  $(a, b, c) = 1$ , the equation  $x^a + y^b = z^c$  has infinitely many integer solutions given by the formulas

$$x = u(u^a + v^b)^{br}, \quad y = v(u^a + v^b)^{ar}, \quad z = (u^a + v^b)^s,$$

where  $u$  and  $v$  are arbitrary positive integers, and  $r$  and  $s$  are positive integers satisfying the equation  $abr + 1 = cs$ .

R. BELLMAN, Stanford, Calif., U. S. A.

Weitere Lösungen sandten C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), F. GOLDNER (London), R. LAUFFER (Graz).

**Aufgabe 104.** Un carré et un cercle concentriques empiètent l'un sur l'autre. Trouver le minimum de l'aire comprise entre les deux figures. (Ce minimum est différent suivant que c'est le cercle ou le carré qui varie, l'autre figure restant fixe.)

L. KOLLROS, Zurich.

*Lösung:* Der Umfang des Kreises vom Radius  $r$  sei  $K = K_a + K_i$ , wo  $K_a$  außerhalb und  $K_i$  innerhalb des Quadrates verläuft. Ferner habe das Quadrat die Seiten  $2s$ , und sein Umfang sei  $Q = Q_a + Q_i$ , wobei die beiden Teile außerhalb bzw. innerhalb des Kreises liegen. Die Fläche zwischen Kreis und Quadrat ist dann gegeben durch

$$2F_z = (K_a - K_i)r + (Q_a - Q_i)s, \quad (1)$$

und für ein Minimum  $F_0$  muß bis auf Differenzen höherer Ordnung gelten:

$$(K_a - K_i)\Delta r + (Q_a - Q_i)\Delta s = 0. \quad (2)$$

Ist nun das Quadrat fest,  $\Delta s = 0$ , dann folgt aus (2)  $K_a = K_i$ , die Schnittpunkte bilden ein reguläres Achteck. Bekanntlich ist dann

$$Q_i = 8(\sqrt{2} - 1)s \quad \text{und} \quad F_0 = 4(3 - 2\sqrt{2})s^2,$$

gleich den vier vom Quadrat bis zum regulären Achteck abzuschneidenden Ecken. Daraus wird

$$\underline{u = \frac{F_0}{4s^2} = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0,172.}$$