Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **6 (1951)**

Heft 6

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Satz 2. Ist $n = 2^{\alpha} p^{l}$, *so gilt*

$$\frac{1}{2} S(n) < n \quad \text{für} \quad p > 2^{\alpha+1} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} S(n) \geqq n \quad \text{für} \quad p < 2^{\alpha+1},$$

wobei der Fall $S(n)/2 = n$ *nur für* $p = 2^{\alpha+1} - 1$, $l = 1$ *eintritt.*

G. Szász, Szeged (Ungarn).

Aufgaben

Aufgabe 103. Démontrer que les équations suivantes ont une infinité de solutions en nombres naturels distincts x, y, z:

a) $x^n + y^n = z^{n-1}$ (n naturel >1), b) $x^n + y^n = z^{n+1}$ (n naturel), c) $x^3 + y^3 = z^5$.

W. Sierpiński, Varsovie.

Solution: We may state the following result: If $(a\, b, c) = 1$, the equation $x^a + y^b = z^c$ has infinitely many integer solutions given by the formulas

$$x = u\,(u^a + v^b)^{b\,r}, \qquad y = v\,(u^a + v^b)^{a\,r}, \qquad z = (u^a + v^b)^s,$$

where u and v are arbitrary positive integers, and r and s are positive integers satisfying the equation $a\,b\,r + 1 = c\,s$. R. Bellman, Stanford, Calif., U. S. A.

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht), F. Goldner (London), R. Lauffer (Graz).

Aufgabe 104. Un carré et un cercle concentriques empiètent l'un sur l'autre. Trouver le minimum de l'aire comprise entre les deux figures. (Ce minimum est différent suivant que c'est le cercle ou le carré qui varie, l'autre figure restant fixe.)

L. Kollros, Zurich.

Lösung: Der Umfang des Kreises vom Radius r sei $K = K_a + K_i$, wo K_a außerhalb und K_i innerhalb des Quadrates verläuft. Ferner habe das Quadrat die Seiten $2\,s$, und sein Umfang sei $Q = Q_a + Q_i$, wobei die beiden Teile außerhalb bzw. innerhalb des Kreises liegen. Die Fläche zwischen Kreis und Quadrat ist dann gegeben durch

$$2\,F_z = (K_a - K_i)\,r + (Q_a - Q_i)\,s, \tag{1}$$

und für ein Minimum F_0 muß bis auf Differenzen höherer Ordnung gelten:

$$(K_a - K_i)\,\Delta r + (Q_a - Q_i)\,\Delta s = 0. \tag{2}$$

Ist nun das Quadrat fest, $\Delta s = 0$, dann folgt aus (2) $K_a = K_i$, die Schnittpunkte bilden ein reguläres Achteck. Bekanntlich ist dann

$$Q_i = 8\,(\sqrt{2} - 1)\,s \quad \text{und} \quad F_0 = 4\,(3 - 2\sqrt{2})\,s^2,$$

gleich den vier vom Quadrat bis zum regulären Achteck abzuschneidenden Ecken. Daraus wird

$$u = \frac{F_0}{4\,s^2} = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0{,}172.$$

Ist dagegen der Kreis fest, $\Delta r = 0$, so muß $Q_a = Q_i$ sein. Es wird dann $K_i = 8\,r$ arcctg2 und $K_a - K_i = 8\,r\,(2 \operatorname{arcctg} 2 - \pi/4) = 8\,r \operatorname{arcctg} 7$. Daher wird jetzt $F_0 = 4\,r^2 \operatorname{arcctg} 7$ und

$$\underline{u = \frac{F_0}{\pi r^2} = \frac{4 \operatorname{arcctg} 7}{\pi} \approx 0{,}181.}$$

Anmerkung. Ist weder Kreis noch Quadrat fest, sondern die Verbundfläche F_v von beiden (Kreis + Quadrat – Durchschnitt), so muß wegen $2\,F_v = K_a\,r + Q_a\,s$ bis auf Differenzen höherer Ordnung gelten:

$$K_a\,\Delta r + Q_a\,\Delta s = 0. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt $K_i\,\Delta r + Q_i\,\Delta s = 0$, und daraus und aus (3)

$$\underline{K_a : Q_a = K_i : Q_i = v} \tag{4}$$

als notwendige, aber auch hinreichende Bedingung. Mit (4) wird $2\,F_0 = (Q_a - Q_i)\,(v\,r + s)$ und $2\,F_v = Q_a\,(v\,r + s)$, folglich $u = F_0/F = (Q_a - Q_i)/Q_a$. Ist nun $2\,x\,s$ die Sehne, die der Kreis auf einer Quadratseite abschneidet, so kommt

$$u = \frac{1 - 2\,x}{1 - x} = 2 - \frac{1}{1 - x},$$

wobei x wegen (4) der Gleichung

$$\operatorname{arctg} x : \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x\right) = (1 - x) : x$$

genügen muß. Vereinfachung gibt $\operatorname{arctg} x = (1 - x)\,\pi/4$. Diese Gleichung hat genau eine Wurzel zwischen 0 und 1. Ein Näherungsverfahren gibt $x \approx 0{,}4556$ und damit $\underline{u \approx 0{,}163}$.

Die Überlegung ist auf alle konvexen Kreistangentenpolygone mit konzentrischen Inkreisen anwendbar, wenn ihre Variation durch Homothetie in bezug auf den Inkreismittelpunkt geschieht. Die Übertragung auf den Raum ist evident. A. Stoll, Zürich.

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht), F. Goldner (London), L. Kieffer (Luxemburg), R. Lauffer (Graz), E. Plüss (Murgenthal), T. Reich (Glarus), A. Schwarz (Seuzach).

Aufgabe 105. Costruire una conica conoscendone due punti e il cerchio di curvatura in un vertice (non dato). A. Longhi, Lugano.

1. Lösung:
$$x^2 + y^2 - r^2 + \lambda\,(x \cos\alpha + y \sin\alpha - r)^2 = 0$$

stellt einen Kegelschnitt dar, für welchen $x^2 + y^2 = r^2$ Scheitelkrümmungskreis und die Gerade $x \cos\alpha + y \sin\alpha - r = 0$ Scheiteltangente ist. Sind $P_i\,(x_i, y_i)$ die gegebenen Punkte und setzt man $p_i = x_i^2 + y_i^2 - r^2$, so folgt aus $p_i + \lambda\,(x_i \cos\alpha + y_i \sin\alpha - r)^2 = 0$ die Beziehung

$$\frac{x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - r}{x_2 \cos\alpha + y_2 \sin\alpha - r} = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}},$$

die besagt, daß P_1 und P_2 von der Scheiteltangente Abstände haben müssen, die sich wie $\sqrt{|p_1|} : \sqrt{|p_2|}$ verhalten. (P_1 und P_2 müssen beide außerhalb oder beide innerhalb des Kreises liegen.) Man hat also nur die Strecke P_1P_2 harmonisch in diesem Verhältnis zu teilen; die Tangenten aus den Teilungspunkten an den Kreis sind dann die gesuchten Scheiteltangenten, die je einen Kegelschnitt der verlangten Art bestimmen.

C. Bindschedler, Küsnacht.

2. Lösung: Ist k der gegebene Scheitelkrümmungskreis, der übrigens durch einen beliebigen Kegelschnitt ersetzt werden kann, und P, Q das gegebene Punktepaar (reell oder konjugiert komplex), so schneidet das durch k und den gesuchten Kegelschnitt bestimmte Superoskulationsbüschel aus (PQ) Punktepaare einer Involution aus, welche den Schnittpunkt der Superoskulationstangente mit (PQ) zu einem Doppelpunkt besitzt, weil diese Tangente den einzigen zerfallenden Kegelschnitt des Büschels vorstellt. Diese Involution ist durch P, Q und die Schnittpunkte von (PQ) mit k festgelegt. Die vier Tangenten aus den Doppelpunkten an k berühren k in den vier Superoskulationspunkten (also, wenn k ein Kreis ist, in vier Scheiteln) der vier möglichen Lösungen. Diese vier Scheitel bilden einen harmonischen Wurf auf k.

Realitätsverhältnisse: 1. Die Doppelpunkte sind reell. a) k schneidet (PQ) reell, daher ist ein Doppelpunkt innerhalb von k, also zwei Lösungen reell, zwei konjugiert komplex. b) k schneidet (PQ) nicht reell, also beide Doppelpunkte außerhalb von k, daher vier reelle Lösungen.

2. Die Doppelpunkte sind nicht reell, daher vier paarweise konjugiert komplexe Lösungen. H. Böheim, Graz.

Eine der zweiten analoge Lösung sandte R. Lauffer (Graz). J.-P. Sydler (Zürich) weist darauf hin, daß sich diese Lösung sofort aus seiner Lösung von Aufgabe 95 (El. Math. *6*, Nr. 4, 90 [1951] ergibt.

Aufgabe 109. Es sei C ein Kreis auf der Kugel K. Man bestimme den geometrischen Ort der Spitzen derjenigen Kegel mit der Leitlinie C, deren zweite Schnittkurven mit K Kreise mit festem Radius sind. Vicente Inglada, Madrid.

Lösung: Der gesuchte Ort ist eine Drehfläche, deren Achse durch die Mittelpunkte von C und K geht. Der Schnitt der Kugel K mit einer Meridianebene μ sei der Kreis k. Die Schnittpunkte des Kreises C mit μ sind die festen Punkte C' und C'' auf k. Die Punkte B' und B'' auf k seien Gegenpunkte eines Kreises B auf K mit dem festen Durchmesser $2r = \overline{B'B''}$. Die Ebene von B ist normal zu μ. Die Schnittpunkte S_1 von $B'C'$ und $B''C''$, und S_2 von $B'C''$ und $B''C'$ sind die Spitzen der Kegel zweiter Ordnung durch die Kugelkreise B und C. Es ist $\sphericalangle B'C'B'' = \sphericalangle B'C''B'' = \beta$ und $\sphericalangle C'B'C'' = \sphericalangle C'B''C'' = \gamma$. Daher ist $\sphericalangle C'S_1C'' = \gamma - \beta$ und $\sphericalangle C'S_2C'' = \gamma + \beta$. Da C' und C'' feste Punkte und β, γ feste Winkel sind, liegen die Punkte S_1 und S_2 je auf einem Kreis durch C' und C''. Der gesuchte Ort setzt sich daher aus zwei Kugeln durch den Kreis C zusammen. R. Lauffer, Graz.

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht), H. Böheim (Graz), A. Schwarz (Seuzach), H. R. Speich (Zürich), C. Vuille (La Chaux-de-Fonds).

Neue Aufgaben

140. On considère l'ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, rapportée à ses axes de symétrie, et le cercle concentrique C de rayon $a + b$. Montrer que les cercles de Chasles qui ont leurs centres sur C et qui sont tangents extérieurement à l'ellipse sont enveloppés par une courbe du sixième degré dont on demande l'équation. (Voir problème n° 50, El. Math. *4*, n° 4, 91 [1949]). A. Loeffler, Rolle.

141. Trouver la probabilité que dans un jeu français de 40 cartes il y ait au moins une fois une dame et un valet contigus. C. Böhm, Zurich.

142. Man beweise für $(n, k) = 1$ die Kongruenz

$$\binom{n-k-1}{k-1} \equiv 0 \pmod{k}$$

R. Lauffer, Graz.

143. On a dans un plan deux groupes de cinq points A, B, C, D, E et A', B', C', D', E'. Soit $\bar{E}$ le point qui correspond à E' dans la collinéation déterminée par les quatre paires de points AA', BB', CC', DD'; on aurait quatre autres points $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$, d'une façon analogue. Démontrer que les cinq droites $A\bar{A}$, $B\bar{B}$, $C\bar{C}$, $D\bar{D}$, $E\bar{E}$ se coupent en un point qui est aussi sur les cinq coniques $ABCD\bar{E}$, $ABC\bar{D}E$, $AB\bar{C}DE$, $A\bar{B}CDE$, $\bar{A}BCDE$.

L. KOLLROS, Zurich.

144. B. VAN DER POL findet als Nebenresultat tiefliegender Untersuchungen[1]) folgende Identitäten zwischen unendlichen Summen und den entsprechenden unendlichen Integralen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{4m+1}}{e^{2\pi k}-1} = \int_0^{\infty} \frac{x^{4m+1}}{e^{2\pi x}-1}\, dx. \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

Man gebe einen direkten Beweis.

E. TROST, Zürich.

Schweizerische Mathematische Gesellschaft

40. Jahresversammlung in Luzern, 29./30. September 1951

Programm

G. HAUSER (Luzern): Über eine neue Auffassung der Bedeutung Platons für die Entwicklung der Mathematik.
G. THIERRIN (Villars-sur-Ollon): Sur les groupes semi-abéliens.
S. PICCARD (Neuchâtel): Les systèmes d'éléments générateurs d'un groupe d'ordre fini et leurs groupes associés.
S. PICCARD (Neuchâtel): Les bases du groupe de KLEIN généralisé et de certains groupes de MATHIEU.
H. BIERI (Bern): Extremale konvexe Rotationskörper.
K. F. MOPPERT (Basel): Über einen verallgemeinerten Ableitungsoperator.
H. P. KÜNZI (Zürich): Riemannsche Flächen mit periodischen und doppeltperiodischen Enden.
H. GUGGENHEIMER (Basel): Zur Homologietheorie Riemannscher Mannigfaltigkeiten.
M. GUT (Zürich): Kubische Klassenkörper über quadratisch-imaginären Grundkörpern.
CH. BLANC (Lausanne): Formules d'intégration approchée et fonctions aléatoires.
L. LOCHER-ERNST (Winterthur): Grundlagen einer koordinatenfreien Kurventheorie.
H. MEIER (Rorbas): Burnside-Gruppen und Dimensionsdefekt.
R. C. YOUNG (London): L'œuvre de vulgarisation dans les mathématiques pures.
A. KRISZTEN (Zürich): Pseudoanalytische Funktionen.

Literaturüberschau

GUSTAV MIE: *Die Grundlagen der Mechanik*

80 Seiten, Ferdinand-Enke-Verlag, Stuttgart 1950

Indem der Verfasser im Vorwort feststellt, daß in den Kreisen der Physiklehrer und in den Lehrbüchern immer noch keine eindeutige Übereinstimmung der Auffassungen über Grundbegriffe der Mechanik, vor allem über den Begriff der Kraft, herrscht, geht er dazu über, diese Grundbegriffe systematisch zu erforschen. Das Büchlein beginnt mit der Messung des Abstandes zweier Punkte und endet mit der Diskussion der Gravitation und der allgemeinen Relativitätstheorie. Der Verfasser schreibt die Entstehung der Trägheitskräfte eindeutig dem leeren Raume zu, wie es auch die allgemeine Relati-

---

[1]) B. VAN DER POL, *On a non-linear partial differential equation satisfied by the logarithm of the Jacobian thetafunctions, with arithmetical applications*, Indagationes math. *13*, 276 (1951).