Eine kombinatorische Systematik der Punktmengen

Autor(en): **Aigner, Alexander**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **7 (1952)**

Heft 1

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-16350

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Für das n-mal wiederholbare Experiment sind p, q, ε vorgegebene, feste Zahlen. Wie klein ε auch gewählt wird, so wird doch $S(\varepsilon)$ mit wachsendem n gegen 1 streben. Die Wahrscheinlichkeit $S(\varepsilon)$, daß die Trefferzahl r zwischen $n(p-\varepsilon)$ und $n(p+\varepsilon)$ liegt oder daß die relative Trefferzahl r/n sich von p um weniger als ε unterscheidet, daß also

$$\left|\frac{r}{n} - p\right| < \varepsilon$$

ist, geht mit wachsender Versuchszahl n gegen 1.

Beispiel. Die Zahl 6 trete beim Würfeln mit der Wahrscheinlichkeit 1/6 auf. Wie groß muß die Zahl der Würfe n gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit 0,999 dafür beträgt, daß die relative Trefferzahl r/n sich von 1/6 um weniger als $\varepsilon = 1/60$ unterscheidet?

Nach (7) gilt

$$S(\varepsilon) > 1 - \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}{n \frac{1}{3600}} > 0{,}999$$

oder

$$n > 500000.$$

Wird dieser Würfel 500000mal geworfen, so kann man 1:999 wetten, daß die beobachtete relative Trefferzahl $r/500000$ sich von 1/6 um weniger als 1/60 unterscheidet, das heißt, daß

$$\left|\frac{r}{500000} - \frac{1}{6}\right| < \frac{1}{60}$$

ist, oder daß für die wirklich beobachtete Trefferzahl gilt

$$75000 < r < 91667.$$

Eine schärfere Abschätzung zeigt, daß nur $n > 5\,415$ sein muß.

P. BUCHNER, Basel.

Eine kombinatorische Systematik der Punktmengen

In Ergänzung zum sonst üblichen Vorgehen bei den Grundbegriffen der Punktmengenlehre sei hier eine von kombinatorischen Gesichtspunkten getragene Systematik gegeben.

Wir nehmen einen gewöhnlichen euklidischen Gesamtraum (Gerade, Ebene) an und in ihm eine Punktmenge M, deren Komplement auf den Gesamtraum $\overline{M}$ heißen möge. Wir klassifizieren nun einen beliebigen Punkt des Raumes nach folgenden drei Fragen: 1. Ist er Punkt von M? 2. Ist er Häufungspunkt von M? 3. Ist er Häufungspunkt von $\overline{M}$? – Die rein kombinatorisch vorhandenen acht Möglichkeiten treten nicht alle auf, weil ein Punkt sicher mindestens Häufungspunkt von M oder von $\overline{M}$ sein muß. Die gleichzeitige Verneinung der 2. und 3. Frage scheidet also aus.

So kommen wir auf sechs Punktarten. Wir bezeichnen sie (bezüglich der Menge M) mit den angeführten Namen und ihre Mengen mit den nachstehenden Buchstaben:

	Punkt von M	Häufungspunkt von M	Häufungspunkt von $\overline{M}$		
1	ja	ja	nein	Innenpunkt	I
2	ja	ja	ja	innerer Randpunkt	R_i
3	ja	nein	ja	isolierter Punkt	J
4	nein	ja	nein	Lücke	L
5	nein	ja	ja	äußerer Randpunkt	R_a
6	nein	nein	ja	Außenpunkt	A

Diese Arten sind paarweise zueinander dual, das heißt, was die eine zu M ist, ist die andere zu $\overline{M}$; und zwar 1 und 6, 2 und 5, 3 und 4. So ist zum Beispiel eine Lücke von M ein isolierter Punkt von $\overline{M}$.

Mit Hilfe dieser Bezeichnungen drücken sich leicht gewisse Eigenschaften der Menge M aus. So ist für eine abgeschlossene Menge $R_a = L = 0$, für eine in sich dichte Menge $J = 0$, für eine perfekte daher $R_a = L = J = 0$; für eine offene Menge $R_i = J = 0$. Wegen der angeführten Dualität sieht man daraus auch sofort, daß offene und abgeschlossene Mengen zueinander Komplemente sind.

Wir wenden uns nunmehr der Frage zu, welche Kombinationen dieser sechs Punktarten es wirklich gibt. Über jede Art ist die Entscheidung zu fällen, ob sie vorkommen soll oder nicht. Daß aber von diesen 64 rein denkbaren Kombinationen nicht alle wirklich existieren, lehren bald folgende Regeln:

I. Mit $I = 0$ ist auch $L = 0$; analog mit $A = 0$ auch $J = 0$.

II. Mit $R_i = R_a = 0$ ist $I = 0$ oder $A = 0$.

III. Mit $I = R_i = J = 0$ ist auch $R_a = L = 0$, $A \neq 0$ der Gesamtraum. Der Ansatz bestimmt eindeutig die Nullmenge. Dazu analog:
Mit $A = R_a = L = 0$ ist auch $R_i = J = 0$, $I \neq 0$ der Gesamtraum. Der Ansatz bestimmt eindeutig die Gesamtmenge.

Regel II ist auch umgekehrt positiv zu formulieren: Mit $I \neq 0$ und $A \neq 0$ ist $R_i \neq 0$ oder $R_a \neq 0$, das heißt, gibt es einen Innen- und einen Außenpunkt, so gibt es auch mindestens einen (inneren oder äußeren) Randpunkt.

Dieser Satz ist leicht einzusehen. Wir betrachten den Halbierungspunkt der geradlinigen Verbindung zwischen dem Innen- und dem Außenpunkt. Ist dieser schon ein Randpunkt, so ist nichts mehr zu beweisen. Gehört er aber zu J oder L, so gibt es in seiner Umgebung Punkte von A bzw. von I. Wir kommen dann also auf jeden Fall auf eine Strecke von höchstens halber Länge, deren Endpunkte ein Innen- und ein Außenpunkt sind. Dieses Verfahren läßt sich fortsetzen und liefert (falls man nicht schon bei endlich viel Schritten auf einen Randpunkt stößt) durch Intervallschachtelung einen Punkt, der Häufungspunkt von Innen- wie von Außenpunkten ist und somit nur ein Randpunkt sein kann.

Das System dieser Regeln ist *vollständig*, das heißt, die nicht durch sie ausgeschiedenen Kombinationen bleiben auch wirklich bestehen.

Regel I kürzt den Bestand zweimal auf 3/4, läßt also 36 Kombinationen übrig. Davon streicht Regel II noch 4 und Regel III weitere 5, so daß schließlich 27 übrigbleiben. Diese 27 gibt es nun tatsächlich, wie an Hand einer systematischen Aufzählung gezeigt sei. Jeder Mengentyp ist durch ein – meist unter reicher Auswahl genommenes – Beispiel einer linearen Punktmenge belegt. Dabei sei 1 das Symbol des Vorkommens, 0 das Symbol des Nichtvorkommens einer Punktart, wobei ersteres natürlich nicht heißen soll, daß es *nur* einen Punkt der betreffenden Art gibt.

	I	R_i	J	L	R_a	A	
1	1	1	1	1	1	1	(0,1] ohne 1/2 und 2
2	1	1	0	1	1	1	(0,1] ohne 1/2
3	1	1	1	0	1	1	(0,1] und 2
4	1	1	0	0	1	1	(0,1]
5	1	0	1	1	1	1	(0,1) ohne 1/2 und 2
6	1	0	0	1	1	1	(0,1) ohne 1/2
7	1	0	1	0	1	1	(0,1) und 2
8	1	0	0	0	1	1	(0,1)
9	1	1	1	1	0	1	[0,1] ohne 1/2 und 2
10	1	1	0	1	0	1	[0,1] ohne 1/2
11	1	1	1	0	0	1	[0,1] und 2
12	1	1	0	0	0	1	[0,1]
13	0	1	1	0	1	1	positiv rational und negativ ganz
14	0	1	0	0	1	1	positiv rational
15	0	0	1	0	1	1	{1, 1/2, 1/3, ...}
16	0	1	1	0	0	1	{1, 1/2, 1/3, ..., 0}
17	0	1	0	0	0	1	triadische Menge von CANTOR
18	0	0	1	0	0	1	ganze Zahlen; – endliche $M \neq 0$
19	0	0	0	0	0	1	Nullmenge
20	1	1	0	1	1	0	Komplement zu 13
21	1	1	0	0	1	0	Komplement zu 14
22	1	1	0	1	0	0	Komplement zu 15
23	1	0	0	1	1	0	Komplement zu 16
24	1	0	0	0	1	0	Komplement zu 17
25	1	0	0	1	0	0	nichtganze Zahlen
26	1	0	0	0	0	0	Allmenge
27	0	1	0	0	1	0	rationale Zahlen

Somit ersehen wir den Satz:

Es gibt 27 Mengentypen bezüglich der 6 Punktarten.

1 bis 4 ist im wesentlichen der Typ des halboffenen Intervalls, 5 bis 8 der des offenen, 9 bis 12 der des abgeschlossenen. Die Typen 13 bis 19 sind ohne innere Punkte (Randmengen); 20 bis 26 dazu komplementär, ohne äußere Punkte. Allgemein ist die Komplementärmenge vom Typus der umgekehrt gelesenen Reihenfolge. Daher existiert mit einem solchen Typ auch immer der umgekehrte. 1, 4, 27 sind zu sich selbst invers, symmetrisch.

Vom Typ 19 ist nur die Nullmenge, vom Typ 26 nur die Allmenge. Endliche Mengen (außer 0) haben alle den Typ 18, von welchem es aber auch unendliche Mengen gibt. Die Typen 1 bis 12, 20 bis 26 als Mengen mit Innenpunkten, ferner 17 als perfekt sind nicht abzählbar. 15 und 18 sind sicher abzählbar, während es von den Typen 13, 14, 16, 27 sowohl abzählbare als auch nichtabzählbare Mengen gibt.

ALEXANDER AIGNER, Graz.

Aufgaben

Aufgabe 106. Gegeben sind ein Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkt M und ein von M verschiedener Punkt A in der Ebene des Strahlenbüschels. Man durchlaufe von A aus eine völlig stetige, in A endende Kurve, die mit jedem Strahl des Büschels genau einen Punkt gemeinsam hat. Wenn die Kurve keine Gerade ist, besitzt sie entweder mindestens drei Wendepunkte oder mindestens einen Wendepunkt und mindestens eine Spitze. (Eine Kurve heißt «völlig stetig», wenn sie sowohl bezüglich ihrer Punkte als auch ihrer als existierend vorausgesetzten Tangenten stetig ist. Sie braucht hingegen nicht algebraisch, auch nicht einmal analytisch zu sein.)

L. LOCHER-ERNST, Winterthur.

1. Lösung: Geht die Tangente eines Punktes P der Kurve durch M, so muß P ein Wendepunkt oder eine Spitze sein, was leicht aus der Voraussetzung folgt, daß jede Gerade des Büschels in M genau einen Punkt mit der Kurve gemeinsam hat.

Sei P_0 ein gewöhnlicher Punkt der Kurve; seine Tangente geht also nicht durch M. Wir betrachten die Variation des Schnittpunktes Q der Tangente in P mit der Geraden P_0M, wenn P die Kurve in einem bestimmten Sinne durchläuft. Lassen wir P eine Umgebung von P_0 durchlaufen, so erreicht Q den Punkt P_0 und verläßt ihn wieder mit umgekehrter Bewegungsrichtung (dabei benützen wir, daß P_0M nicht Tangente in P_0 ist). Lassen wir P die Kurve von P_0 aus bis zurück nach P_0 durchlaufen, so muß Q seine Bewegungsrichtung in einem Punkte Q_1 ändern, da Q von P_0 ausgeht und mit umgekehrter Bewegungsrichtung nach P_0 zurückkommt. Der dem Punkte Q_1 entsprechende Punkt P_1 der Kurve ist ein Wendepunkt.

Es existiert also mindestens ein Wendepunkt P_1.

Wir betrachten jetzt die Variation des Schnittpunktes X der Tangente in P mit der Geraden P_1M, wenn P die Kurve in einem bestimmten Sinne durchläuft. Lassen wir P eine Umgebung von P_1 durchlaufen, so durchläuft X eine Umgebung von P_1 auf P_1M, ohne seine Bewegungsrichtung zu ändern (dies gilt auch im Falle, daß P_1M Tangente in P_1 ist). Lassen wir P die Kurve von P_1 aus bis zurück nach P_1 durchlaufen, so bestehen genau zwei Möglichkeiten:

1. X durchläuft ein oder mehrere Male die ganze Gerade P_1M, ohne seine Bewegungsrichtung zu ändern. Dann durchläuft X mindestens einmal den Punkt M. Die M entsprechenden Punkte der Kurve sind Spitzen, da X seine Bewegungsrichtung beim Durchlaufen von M beibehält. Es existiert also in diesem Falle mindestens eine Spitze.

2. X ändert seine Bewegungsrichtung in einem Punkte X_2. Dann ändert X seine Bewegungsrichtung in mindestens einem weiteren Punkte X_3, da X beim Wiedereintreffen von P in P_1 die ursprüngliche Bewegungsrichtung haben muß. Die den Punkten X_2 und X_3 entsprechenden Punkte P_2 und P_3 der Kurve sind weitere Wendepunkte.

Damit haben wir gezeigt, daß die Kurve entweder mindestens einen Wendepunkt und mindestens eine Spitze oder mindestens drei Wendepunkte besitzt.

Erste Bemerkung. Im obigen Falle 2 ist die Anzahl der Umkehrstellen von X immer gerade, woraus folgt, daß die Anzahl der Wendepunkte der Kurve stets ungerade ist (sofern sie endlich ist).

Zweite Bemerkung. Wir haben beim Beweis vorausgesetzt, daß die Kurve keine Geradenstücke enthält. Läßt man diese Voraussetzung fallen, wobei aber die Kurve