

# Sind die elementargeometrischen Figuren Mengen?

Autor(en): **Aumann, Georg**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **7 (1952)**

Heft 2

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-16351>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts  
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer*

---

El. Math.

Band VII

Nr. 2

Seiten 25–48

Basel, 15. März 1952

---

## Sind die elementargeometrischen Figuren Mengen?

1. Es hat wohl etwas für sich, Naivität als unbewußte Abstraktion anzusprechen; der moderne Mensch bedarf oft der gedanklichen Abstraktion, um sich in den Standpunkt zu versetzen, den der naive von vorneherein einnimmt. Ein amüsanter Beispiel hierzu liefert ein Kapitel der Geometrie, die Lehre vom Flächeninhalt. Dort wird das Addieren, Subtrahieren und Zerlegen von ebenen Figuren in ganz naiver Weise vollzogen. Eine nähere Analyse aber zeigt, daß es sich bei diesen Operationen gar nicht um Mengenverknüpfungen im gewöhnlichen Sinne, ausgeführt an Punktmengen, handelt, sondern um Verknüpfungen in einer Booleschen Algebra, also um einen doch recht abstrakten Vorgang. Es ist aber möglich, zu einer rein mengenalgebraischen Deutung der Operation der Elementargeometrie zu gelangen, und zwar auf zwei verschiedenen Wegen: einerseits dadurch, daß man jeder Elementarfigur eine ganz bestimmte, sie repräsentierende Punktmenge zuordnet, was eine gewisse Willkür hereinbringt, andererseits durch eine inhaltliche Umdeutung der Figuren als Mengen von Elementen, welche feiner sind als die euklidischen Punkte und durch Aufspaltung der letzteren zustande kommen. Nach dem Darstellungssatz von STONE<sup>1)</sup> sind diese feineren Elemente die Primideale der betreffenden Booleschen Algebra. Im allgemeinen verlangt der Existenznachweis solcher Primideale die Wohlordnungstheorie; in unseren Beispielen jedoch lassen sich diese Primideale als konkrete elementargeometrische Objekte deuten. Da, wie mir scheint, dies nicht genügend bekannt ist, möchte ich hier kurz darauf eingehen.

2. Schon im eindimensionalen Falle, auf der Zahlgeraden, tritt bei der Behandlung der Elementarfiguren, das heißt der endlichen Aggregate von Intervallen, eine Schwierigkeit auf, welche bereits ARISTOTELES in seiner Physik erwähnt: Bei der Zweiteilung einer Strecke wird der eine Teilungspunkt zu zwei Punkten, nämlich je einem Endpunkt der beiden Teile. Diese Schwierigkeit umgeht man heute bekanntlich in der Weise, daß man jedem Intervall  $(a, b)$ ,  $a < b$ , als Punktmengenrepräsentant die Menge  $[a \leq x < b]$  zuordnet. Dann wird zum Beispiel die Teilung

$$[a \leq x < b] = [a \leq x < c] + [c \leq x < b]$$

mit  $a < c < b$  wirklich eine Zerlegung im Sinne der Mengenlehre; Analoges gilt allgemein für das Operieren mit Aggregaten solcher «halboffener» Intervalle.

---

<sup>1)</sup> M. H. STONE, *The theory of representations for Boolean algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **41**, 375–481 (1937).

Eine andere Möglichkeit, das elementare Operieren mit Intervallen auf eine rein mengenalgebraische Basis zu stellen, bei der obige Unsymmetrie nicht auftritt, ist die Einführung von «Halbpunkten»: Aus dem Punkt  $x$  macht man zwei Halbpunkte  $(x; u)$  mit  $u = \pm 1$ . Dem Intervall  $(a, b)$  wird dann die Halbpunktmenge  $I_{a,b}$  zugeordnet, welche aus allen Halbpunkten  $(x; u)$  mit  $a < x < b$  und  $u = \pm 1$  und den Halbpunkten  $(a, +1)$  und  $(b, -1)$  besteht. Der kleinste Mengenkörper über dem System der Halbpunktmenge  $I_{a,b}$ ,  $-\infty < a < b < +\infty$ , ist dann isomorph mit der Booleschen Algebra der Intervallaggregate.

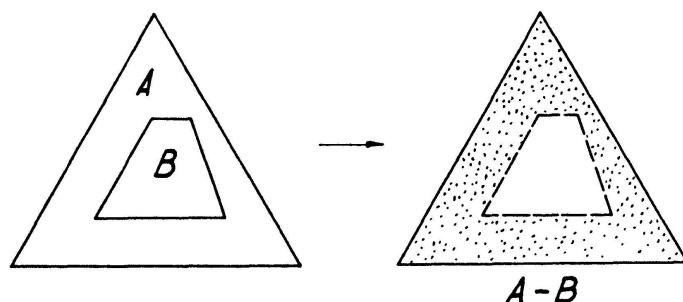


Fig. 1

3. Ähnlich ist die Lage, wenn man in einer  $(x, y)$ -Ebene das System der Aggregate achsenparalleler Rechtecke betrachtet. Die Boolesche Algebra in diesem System ist isomorph einer Mengenalgebra im System der Aggregate der halboffenen Intervalle

$$[a \leq x < b; c \leq y < d] \text{ mit } a < b \text{ und } c < d.$$

Neben dieser Repräsentantenmethode steht hier die Verwendung von «Viertelpunkten»  $(x, y; u)$  mit  $u = 1, 2, 3, 4$ . Dem obigen Rechteck entspricht dabei die Viertelpunktmenge  $I_{a,b; c,d}$ , welche aus allen Viertelpunkten  $(x, y; u)$  mit  $a < x < b$ ,  $c < y < d$  und  $u = 1, 2, 3, 4$  besteht, ferner aus  $(a, c; 1)$ , weiter aus  $(x, c; u)$  mit  $a < x < b$  und  $u = 1, 2$ , weiter  $(b, c; 2)$ ,  $(b, y; u)$  mit  $c < y < d$  und  $u = 2, 3$ ,  $(b, d; 3)$  usw., womit wohl das Prinzip schon hinreichend klargemacht ist.

4. Gehen wir nun über zu den allgemeinen elementargeometrischen Figuren  $F$  der Ebene, das heißt zu den geradlinig begrenzten, beschränkten ebenen Bereichen, dem Gegenstand der Flächeninhaltslehre. Weder ihre Repräsentation als offene noch als abgeschlossene Mengen<sup>1)</sup> euklidischer Punkte läßt in befriedigender Weise ein rein mengenmäßiges Operieren zu. Dies möge zum Beispiel Figur 1 illustrieren, in welcher ausgezogene bzw. gestrichelte Begrenzung bedeutet, daß sie zur bzw. nicht zur Menge gehört.

Die geeignete Repräsentation verlangt auch hier eine nur teilweise Hinzunahme der Randpunkte zur Repräsentantenmenge: Die Repräsentantenmenge  $R$  der Elementarfigur  $F$  besteht zunächst einmal aus allen inneren Punkten von  $F$ ; bezüglich der Randpunkte werde etwa nach folgender Regel entschieden: Jeder Randstrecke  $s$  der Figur  $F$  werde der Richtungswinkel  $w_s$ , der nach innen weisenden Normalen zugeordnet ( $0 \leq w_s < 2\pi$ ). Die inneren Punkte von  $s$  gehören zu  $R$ , wenn  $0 \leq w_s < \pi$ , und sonst nicht. Ein Eckpunkt der Figur wird der Repräsentantenmenge  $R$  zuge-

<sup>1)</sup> Das wäre wohl das Nächstliegende.

rechnet, wenn von ihm aus die Richtung  $\omega = \pi/2$  ins Innere von  $F$  oder in das nach vorausgehender Regel zu  $R$  gehörige Innere einer Randstrecke weist. Man überlegt sich leicht, daß dieses Repräsentantensystem einen Mengenkörper liefert, in welchem die Mengenverknüpfungen genau den naiven Operationen an den Elementarfiguren entsprechen.

Die Methode der Punktaufspaltung führt hier zu einer «Fächerung» des euklidischen Punktes. Der Punkt  $(x, y)$  wird «aufgefächert» in die Feinpunkte  $(x, y; \omega, u)$  mit  $0 \leq \omega < 2\pi$  und  $u = \pm 1$ . Man könnte hierbei auch von «Harpunen» (seitenorientierten Halbstrahlen) sprechen, wobei  $(x, y)$  die Spitze,  $\omega$  die Richtung des Schaftes und  $u$  die Lage des einseitigen Hakens der Harpune bezeichnen. Einer Elementarfigur  $F$  wird nun eine Harpunenmenge  $H$  zugeordnet: Ist  $(x, y)$  innerer Punkt von  $F$ , so gehören zu  $H$  alle Harpunen mit der Spitze  $(x, y)$ ; ist  $(x, y)$  Randpunkt von  $F$ , so gehören zu  $H$  alle jene Harpunen, deren Spitze  $(x, y)$  ist und deren Schaft ins Innere von  $F$  weist, mit beliebiger Hakenlage, schließlich auch jene endlich vielen Harpunen mit der Spitze  $(x, y)$ , deren Schaft auf einer Randstrecke liegt und deren Haken ins Innere von  $F$  weist (Figur 2). Das System dieser Harpunenmengen ist ein zur Booleschen Algebra der Elementarfiguren isomorpher Mengenkörper.

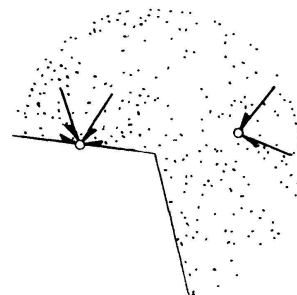


Fig. 2

5. Es möge noch die Stellung der oben eingeführten «Feinpunkte» in der Idealtheorie der Booleschen Algebren erläutert werden. Alle oben angegebenen Mengendarstellungen der betreffenden Booleschen Algebren sind *reduziert*. So wird ein Mengenkörper  $\mathfrak{R}$  genannt, wenn für jedes Element  $x$  einer Menge  $M$  aus  $\mathfrak{R}$  gilt: Der Durchschnitt aller Mengen  $M$  aus  $\mathfrak{R}$  mit  $x \in M$  besteht nur aus  $x$ . Das System  $\mathfrak{P}_x$  aller Mengen  $M$  aus  $\mathfrak{R}$  mit  $x$  nicht  $\in M$  ist ein Primideal. Man verifiziert für  $\mathfrak{P}_x$  leicht die Primidealeigenschaften: 1. Mit  $M$  ist auch jedes  $T \subset M$  in  $\mathfrak{P}_x$ ; 2. Mit  $M_1$  und  $M_2$  ist auch  $M_1 + M_2$  in  $\mathfrak{P}_x$ ; 3. mit  $M_1 M_2$  in  $\mathfrak{P}_x$  ist wenigstens einer der Faktoren in  $\mathfrak{P}_x$ . Sind die  $\mathfrak{P}_x$  die einzigen, von  $\mathfrak{R}$  verschiedenen Primideale in  $\mathfrak{R}$ , so können die Elemente  $x$  selbst als die Primideale von  $\mathfrak{R}$  gedeutet werden. Dieser letzte Umstand liegt bei den obigen Mengendarstellungen mittels der Halb-, Viertel- bzw. Feinpunkte vor, so daß diese Objekte die elementargeometrische Deutung der Primideale darstellen.

Dies sei im Falle der Halbpunkte – bei den Viertel- und Feinpunkten geht es ähnlich – noch näher begründet. Sei zu diesem Zweck  $\mathfrak{P}$  ein Primideal ( $\neq \mathfrak{B}$ ), in der Booleschen Algebra  $\mathfrak{B}$ , der Elementarfiguren  $F$  auf der  $x$ -Geraden (zur Vereinfachung der nachfolgenden Formulierungen sei  $\mathfrak{B}$  gedeutet als die Mengenalgebra im System der endlichen Aggregate halboffener Intervalle [einschließlich der leeren Menge] im Sinne von 2). Bezüglich eines Punktes  $x$  unterscheiden wir folgende Verhaltensweisen von  $\mathfrak{P}$ :

- ( $a_x$ ) Jedes  $F \in \mathfrak{P}$  läßt eine rechtsseitige Umgebung von  $x$  frei;
- ( $b_x$ ) Jedes  $F \in \mathfrak{P}$  läßt eine linksseitige Umgebung von  $x$  frei;
- ( $c_x$ ) Weder ( $a_x$ ) noch ( $b_x$ ) findet statt, das heißt, es gibt  $F_1 \in \mathfrak{P}$  bzw.  $F_2 \in \mathfrak{P}$ , welche eine rechts- bzw. linksseitige Umgebung von  $x$  überdecken.

Würde der Fall ( $c_x$ ) für jedes  $x$  eintreten, so wäre  $\mathfrak{B}$  das triviale Primideal  $\mathfrak{P}$  aller Elementarfiguren. In der Tat, wenn ( $c_x$ ) stattfindet, gibt es ein  $F_3 \in \mathfrak{P}$ , welches eine

ganze Umgebung von  $x$  überdeckt, nämlich  $F_1 \dagger F_2$ . Ist nun  $F$  irgendeine Elementarfigur, so kann ihre abgeschlossene Hülle nach dem Borelschen Überdeckungssatz bereits mit endlich vielen Figuren aus  $\mathfrak{B}$ , also sogar mit einer einzigen Figur  $F'$  aus  $\mathfrak{B}$ , nämlich der Vereinigung dieser endlich vielen Figuren, überdeckt werden. Alsdann würde auch  $F$  als Teilfigur von  $F'$  zu  $\mathfrak{B}$  gehören, das heißt, es wäre  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}$  (Widerspruch!).

Andererseits kann der Fall «non ( $c_x$ )», das heißt «( $a_x$ ) oder ( $b_x$ )» höchstens für ein  $x$  eintreten und dann von beiden Möglichkeiten nur eine. In der Tat, würde nämlich, wenn  $x_1, x_2$  gleiche oder verschiedene Punkte bezeichnen, gleichzeitig ( $a_{x_1}$ ) und ( $b_{x_2}$ ) gelten, so sei  $F_1$  ein Intervall mit  $x_1$  als linkem, und  $F_2$  ein dazu fremdes Intervall mit  $x_2$  als rechtem Randpunkt. Dann ist  $F_1 F_2 = 0 \in \mathfrak{B}$ , aber weder  $F_1$  noch  $F_2 \in \mathfrak{B}$ , im Widerspruch zur dritten Primidealeigenschaft. Ebenso führt die Annahme, daß mit  $x \neq y$  gleichzeitig ( $a_x$ ) und ( $a_y$ ) oder gleichzeitig ( $b_x$ ) und ( $b_y$ ) bestehen, auf Widerspruch.

Schließlich bemerken wir noch, daß die Mengen ( $x^+$ ) [bzw. ( $x^-$ )] aller Elementarfiguren, welche je eine rechts- bzw. linksseitige Umgebung von  $x$  frei lassen, Primideale in  $\mathfrak{B}$  sind, und, von  $\mathfrak{B}$  abgesehen, nach obigen auch wirklich alle sind. Damit ist die Deutung der Primideale ( $\neq \mathfrak{B}$ ) in  $\mathfrak{B}$  als Halbpunkte gerechtfertigt.

6. In der naiven Auffassung von den Elementarfiguren werden die Komplikationen auf den Rändern der Figuren beim Zerlegen und Zusammenfassen einfach «übersehen». Hinsichtlich dieses «Übersehens» sei noch auf eine dritte mengenmäßige Deutung hingewiesen: Wir betrachten auf der Zahlgeraden die Mengen  $M$ , welche sich als Vereinigungsmenge von endlich vielen offenen Intervallen und einer endlichen Punktmenge darstellen. Das System  $\mathfrak{M}$  dieser Mengen ist ein Mengenkörper, das Teilsystem  $\mathfrak{C}$  der endlichen Punktmenge ist ein Mengenideal in  $\mathfrak{M}$  (es gelten die Eigenschaften 1 und 2 von Nr. 5). Man führt in  $\mathfrak{M}$  eine Äquivalenz, die Gleichheit bei Vernachlässigung von Mengen aus  $\mathfrak{C}$ , ein:  $M_1 \equiv M_2$  dann und nur dann, wenn der Mengenunterschied  $M_1 \dagger M_2 [= (M_1 - M_1 M_2) + (M_2 - M_1 M_2)] \in \mathfrak{C}$ . Die einzelnen Mengenoperationen erweisen sich gegenüber dieser Äquivalenz als konsistent, was zur Folge hat, daß das System  $\mathfrak{M}/\mathfrak{C}$  der Äquivalenzklassen in  $\mathfrak{M}$  nach  $\mathfrak{C}$  eine Boolesche Algebra, nämlich die der Elementarfiguren auf der Geraden, darstellt.

7. Erst die Vielfältigkeit in den Möglichkeiten, das Operieren mit Elementarfiguren mengentheoretisch zu deuten, wie die Auswahl von Repräsentantenpunktmenge, der Übergang zu den Feinpunkten oder die Einführung einer Punktmengeäquivalenz, zeigt, welche Bedeutung der abstrakten, rein formalen Auffassung, der Deutung als Boolescher Algebra zukommt und daß es sinngemäßer ist, die Elementarfiguren weder als Mengen euklidischer Punkte noch als Mengen irgendwelcher feinerer Elemente, sondern als Elemente einer Booleschen Algebra, das heißt nach einem Vorschlag von C. CARATHÉODORY<sup>1)</sup> als Somen zu betrachten.

GEORG AUMANN, München.

<sup>1)</sup> C. CARATHÉODORY, *Versuch einer Algebraisierung des Integralbegriffes*, Sitz.-Ber. Bayer. Akad. 1938, 27–69.