Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **7 (1952)**

Heft 2

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Dans notre problème, l'aire à calculer est détachée par un plan sécant incliné sous un angle α sur le plan de projection normal à l'axe. Ce plan sécant détermine une conique c qui se projette en c'. Il vient

$$\text{Aire } c' = \text{Aire } c \cdot \cos\alpha .$$

Et en remplaçant:

$$\text{Aire latérale détachée} = \frac{\text{Aire } c'}{\sin\varphi} = \text{Aire } c \, \frac{\cos\alpha}{\sin\varphi} .$$

Or $\alpha = \varphi$, puisque le plan sécant est normal à la génératrice. D'où

$$\underline{\text{Aire latérale détachée} : \text{Aire conique} \cdot \operatorname{ctg}\varphi .}$$

Il va sans dire que cette formule reste valable, si la conique c se réduit à la portion B symétrique par rapport à l'axe focal. Finalement on trouve donc

$$\underline{\text{Aire totale solide convexe} : 2\,n\,B \operatorname{ctg}\varphi .} \qquad (2)$$

En substituant la valeur de B trouvée plus haut, on a les aires totales suivantes

Solide circonscrit

tétraèdre $\quad A = 6\left(\arccos\frac{4}{5} - \frac{3}{10}\right) c^2;$

octaèdre $\quad A = 4\left(8 - 5\sqrt{2}\right) c^2;$

cube $\quad A = 3\sqrt{2}\left(3 - 2 \operatorname{arc ch} \frac{5}{4}\right) c^2;$

icosaèdre $\quad A = \dfrac{15(\sqrt{5}-1)}{2}\left[\dfrac{10+3\sqrt{5}}{11} - \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} \operatorname{arc ch} \dfrac{13+5\sqrt{5}}{22}\right] c^2;$

dodécaèdre $\quad A = \dfrac{3(3-\sqrt{5})}{2}\left[\dfrac{210+93\sqrt{5}}{19} - \sqrt{\dfrac{5+3\sqrt{5}}{2}} \operatorname{arc ch} \dfrac{43+9\sqrt{5}}{38}\right] c^2.$

L. Kieffer, Luxembourg.

Aufgaben

Aufgabe 107. Ein völlig stetiger Bogen (siehe Aufgabe 106) ohne Singularitäten (Wendepunkte, Spitzen, Doppelpunkte, Doppeltangenten, Ecken, Strecken) werde unter Vermeidung jeder Singularität über seine beiden Enden hinaus unbegrenzt fortgesetzt; dann existieren eine konvexe Hülle und ein konvexer Kern, denen sich der Bogen anschmiegt. Hierbei kann der Kern wie auch die Hülle ein konvexes Vieleck sein; ersterer kann insbesondere in einen Punkt, letztere in eine Gerade ausarten.

L. Locher-Ernst, Winterthur.

Lösung: Der einfache Bogen ist durch zwei zueinander duale Eigenschaften charakterisiert: Seine Punkte werden aus jedem fest gewählten umkehrbar eindeutig durch ein stetiges Strahlenbüschel projiziert, seine Tangenten von jeder festen umkehrbar eindeutig in einer stetigen Punktreihe geschnitten. Beim Durchlaufen des Bogens werden also in Büschel und Punktreihe Bewegungen ohne Umkehrstellen induziert. Für einen «äusseren» Punkt hat die induzierte Bewegung mindestens eine Umkehrstelle, ebenso für eine «innere» Gerade. Dadurch sind innen und aussen definiert.

Der Fortsetzung eines einfachen Bogens sind bei Aufrechterhaltung seiner charakteristischen Eigenschaften Schranken gesetzt. Die Eindeutigkeit geht verloren, sobald das Anfangselement (Punkt und Tangente) mit dem laufenden Element der Kurve irgendwie zur Inzidenz gelangt, es sei denn, dass die Kurve ganz in sich zurückkehrt, in welchem Fall nichts zu beweisen ist. Andernfalls sind zunächst 5 verschiedene Inzidenzen möglich, von welchen aber die Voraussetzungen der Aufgabe nur folgende beide zueinander duale übriglassen: Entweder kreuzt der Kurvenpunkt die Anfangstangente, ohne dass seine Tangente durch den Anfangspunkt hindurchgeht, oder es läuft die Kurventangente durch den Anfangspunkt, bevor ihr Punkt die Anfangstangente erreicht.

Der erste Fall markiert eine *Stelle der Auswickelung*. Durch alle folgenden Kurvenpunkte läuft eine schliessende Kurventangente, *welche bei der Fortsetzung stetig aus der Anfangstangente des ursprünglichen Bogens hervorgeht.* Sie begrenzt auf der Kurve in jeder Lage einen abschliessenden einfachen Bogen und umrandet gemeinsam mit diesem einen konvexen Punktbereich, der alle früheren Kurvenpunkte enthält und als das «Innere» der durchlaufenen Kurve bezeichnet werden soll. Jede Gerade, welche einen dieser Punktbereiche schneidet, schneidet auch alle folgenden in zwei Randpunkten, und es werden auf der Geraden bei unbegrenzter Fortsetzung der Kurve zwei getrennte, unendliche Folgen von solchen Randpunkten markiert. Diese haben entweder zwei verschiedene oder einen gemeinsamen Häufungspunkt. Gilt auf jeder Geraden der betrachteten Art der erste Fall, so bildet die Gesamtheit der Häufungspunkte die behauptete konvexe Hülle. Denn sie sind Rand eines Punktbereiches, der auf jeder inneren Geraden zwei Randpunkte hat. Gilt auf einer der Geraden der zweite Fall, so ist zu beachten, dass die Kurventangenten auf dieser Geraden Segmente überstreichen, welche sich auf den Häufungspunkt zusammenziehen, und die Tangenten konvergieren nach einem Geradenbüschel. Die Hülle entartet in zwei sich schneidende Geraden. Existieren zwei verschiedene Paare zusammenfallender Häufungspunkte, so sind zugleich alle übrigen Paare zusammenfallend, und die Hülle ist eine Gerade.

Der zweite Fall geht aus dem ersten dadurch hervor, dass Anfangs- und Endelement der Kurve miteinander vertauscht werden, das heisst, es wird die Fortsetzung des einfachen Bogens am anderen Ende ausgeführt. Zugleich ist er zum vorherigen dual. Dasselbe gilt für Behauptung und Beweis. Die Auswicklungsstelle an einem Ende des Bogens bedeutet für das andere eine *Stelle der Einwickelung*. G. BALASTER, Zürich.

Aufgabe 108. Wie Aufgabe 106, mit dem Unterschied, dass mehrfache Punkte, aber keine anderen Singularitäten, zugelassen werden. Der unbegrenzt fortzusetzende Bogen besitzt dann nur Doppelpunkte und notwendig zwei konvexe Hüllen, die keine gemeinsame Tangente und höchstens vier gemeinsame Punkte besitzen.

L. LOCHER-ERNST, Winterthur.

Lösung: In die Fortsetzung des einfachen Bogens tritt gegenüber früher (Lösung zu Nr. 107) als neue Möglichkeit der mehrfache Punkt. Die mehrfache Tangente bleibt dagegen ausgeschlossen. Daher ergibt sich innerhalb eines auswickelnden Kurvenzweiges überhaupt nichts Neues, indem hier Doppeltangenten *vor* Doppelpunkten entstehen müssen. Ein einwickelndes Ende verhält sich wie in Aufgabe 107 bis zu seinem ersten Doppelpunkt. Macht man jetzt diesen zum Ausgangspunkt der Analyse und betrachtet die von den beiden zusammenfallenden Punkten begrenzte Schleife, so gibt die Fortsetzung beiderseits *aus*wickelnde Kurvenzweige, wobei die Schleife für jeden der Zweige die Rolle des anfänglichen konvexen Punktbereiches im Sinne der vorigen Aufgabe spielt. Beide Fortsetzungen enthalten also in sich selbst keine mehrfachen Punkte, und solche entstehen nur durch gegenseitigen Schnitt beider Zweige. Sie sind also notwendig Doppelpunkte.

Es ist noch dafür zu sorgen, dass keine Doppeltangenten zwischen den Zweigen möglich sind. Beachtet man die einfachen Bögen a und b, welche ausgehend vom Doppelpunkt je bis zum Schnittpunkt mit der andern Doppelpunktstangente laufen, und denkt sie durch ihre Sehnen zu konvexen Punktgebieten A und B geschlossen, so liegen beide Gebiete im gleichen Segment der durch die Doppelpunktstangenten bestimmten Gliederung der Ebene, während die Schleife im anderen der beiden Segmente liegt. Es ist nun ausgeschlossen, dass A und B durch eine Transversale ihrers Segmentes voneinander geschieden werden können, weil sofort eine Doppeltangente veranlasst würde. Jede Gerade trifft also mindestens eines der Gebiete, insbesondere auch die unendlichferne Gerade und mindestens einer der Bögen a, b enthält einen unendlichfernen Punkt. A und B haben ein gemeinsames Punktgebiet AB in Form eines konvexen Zweiecks, welches zum Inneren beider sich auswickelnder Kurvenzweige gehört, ebenso wie die Doppelpunktsschleife D, aber von dieser getrennt im anderen der vorigen Segmente liegt. Auf jeder Geraden durch AB und D überstreichen die Tangenten beider Zweige durch AB und D voneinander getrennte Folgen von Segmenten, und es laufen die Tangenten eines Zweiges alle durch das Punktgebiet A bzw. B des andern, insbesondere die Asymptoten.

Nach Aufgabe 107 besitzt jeder Zweig eine konvexe Hülle. Der Durchschnitt ihrer Innengebiete zerfällt in zwei punktfremde, die Gebiete AB bzw. D enthaltende konvexe Zweiecke, wodurch vier Schnittpunkte nachgewiesen sind, es sei denn, dass Hüllen ausgeartet sind. Doppeltangenten aber sind durch die Konstruktion schon ausgeschlossen.

Für den Entwurf der Figur ist noch zu beachten, dass in auswickelnden Zweigen frühere Tangenten durch spätere Kurvenstücke geschnitten werden, aber keine spätere Tangente durch frühere Punkte geht. Dieses ist besonders auf der unendlichfernen Geraden nützlich.

Der Anschauung zugänglicher ist die dual transformierte Aufgabe.

Vorstehende Lösungen haben eine anschauliche Begründung aus überschaubaren Elementen, keine rein begriffliche Deduktion der Behauptungen angestrebt. Diese impliziert eine ausdrückliche Definition der regulären Kurvenstelle und damit zusammenhängend der völligen Stetigkeit. Hierüber liegt eine eingehende Untersuchung von G. Unger vor. G. Balaster, Zürich.

Eine nicht ganz vollständige Lösung beider vorstehender Aufgaben mit analytischen Hilfsmitteln sandte R. Lauffer (Graz). Eine Zeichnung zu Aufgabe 108 findet sich im Buche: L. Locher-Ernst, *Einführung in die freie Geometrie ebener Kurven* (Birkhäuser, Basel 1952), Figur 160.

Aufgabe 114. Soient c un cercle, d une de ses cordes, A un point de c où la tangente est parallèle à d, M et N des points de respectivement c et d alignés sur A. Le cercle tangent à d en N et passant par M est tangent à c et est orthogonal au cercle de centre A et passant par les extrémités de d. P. Rossier, Genève.

Lösung: C sei der Mittelpunkt von c, D derjenige von d und P der Schnittpunkt von CM mit der Senkrechten zu d in N (N kann irgendein Punkt der Geraden sein, auf der d liegt). Offenbar ist $\triangle NPM \sim \triangle ACM$, also $\overline{PN} = \overline{PM}$, so dass P der Mittelpunkt des Kreises k ist, der d in N und c in M berührt. Ist Z ein Endpunkt von d, so ist $\triangle AZM \sim \triangle ANZ$ ($\sphericalangle AMZ = \sphericalangle AZN$); somit gilt $\overline{AZ} : \overline{AN} = \overline{AM} : \overline{AZ}$ oder $\overline{AZ}^2 = \overline{AN} \cdot \overline{AM}$. Ist S der Berührungspunkt der Tangente von A an k, so ist nach dem Sekanten-Tangenten-Satz $\overline{AS}^2 = \overline{AN} \cdot \overline{AM} = \overline{AZ}^2$, so dass der Kreis um A durch Z den Kreis k orthogonal schneidet.

Bemerkung: A ist Zentrum einer Inversion, in der die Gerade d und der Kreis c einander entsprechen, ebenso die Punkte M und N. Der Kreis k durch die inversen Punkte M und N entspricht sich somit selbst und ist orthogonal zum Inversionskreis mit dem Radius AZ. M und N sind Berührungspunkte. G. Neuweiler, Olten.

A. Unterberger (Bludenz) sandte drei verschiedene Lösungen (mit Inversion, stereographischer Projektion und Zyklographie). Weitere Lösungen gingen ein von A. Bager (Hjørring, Dänemark), F. Goldner (London), L. Kieffer (Luxemburg), R. Lauffer (Graz), A. Móor (Debrecen).

Aufgabe 115. Soit R le rayon de la sphère circonscrite à une pyramide triangulaire, r celui de la sphère inscrite. Quel est le minimum de R/r? L. Kollros, Zurich.

Solution: Les centres de gravité des triangles des faces d'un tétraèdre $T \equiv ABCD$ sont situés sur une sphère (ω) dont le rayon $R/3$ égale le tiers de celui de la sphère $ABCD$. (Sphère des douze points de T.)

Si le tétraèdre T n'est pas régulier, il est clair que les plans des quatre faces interceptent sur la sphère (ω) quatre, trois ou deux segments sphériques extérieurs au tétraèdre, suivant que (ω) n'est tangente à aucune face, ou est tangente à une ou deux faces.

Dans toutes ces hypothèses, il existe donc un tétraèdre T_1 directement homothétique au tétraèdre T, dont les plans des faces sont tangents à la sphère (ω) et extérieurs à ceux des faces du tétraèdre fondamental, à moins qu'un ou deux de ces plans ne soient confondus avec un ou deux de ceux des faces de T.

Par suite, les tétraèdres T_1 et T se correspondent dans une homothétie de rapport $k > 1$, et la sphère (ω), confondue avec la sphère inscrite au tétraèdre T_1, est la transformée de la sphère (I), de rayon r, inscrite à T, dans cette homothétie, ce qui donne

$$\frac{R}{3} = k\,r \qquad \text{et} \qquad \frac{R}{r} = 3\,k > 3\,.$$

Lorsque le tétraèdre T est régulier, ce qui a lieu quand la sphère des douze points d'un tétraèdre est tangente à trois faces, et par suite à quatre faces, les tétraèdres T_1 et T coïncident, et on a

$$k = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{R}{r} = 3\,;$$

dans ce cas, le rapport R/r est minimum et réciproquement.

VICTOR THÉBAULT, Tennie (France).

Weitere Lösungen sandten H. KREIS (Winterthur) und H. FAEHNDRICH (Bern), ferner findet sich eine elementare Lösung in: COUDERC und BALLICCIONI, *Premier livre du Tétraèdre* (Gauthier-Villars, Paris 1935), S. 189/190.

Anmerkung von W. LÜSSY: Wäre diese Aufgabe ein Schachproblem, so würde man sagen, sie enthalte eine schöne Verführung. Verwendet man nämlich die Formel von DURRANDE

$$d^2 = (R - r)^2 - 4\,r^2$$

(d Abstand der Zentren beider Kugeln), so ist die Lösung augenscheinlich. Die Formel wurde zuerst in den «Annales de Gergonne», Bd. 14 (1823/1824) veröffentlicht und findet sich auch in der *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*. Sie ist aber, wie Herr H. FAEHNDRICH (Bern) bemerkt, falsch! Man sieht zum Beispiel leicht ein, dass im gleichhöhigen Tetraeder $d = 0$ ist und R/r jeden Wert $\geqq 3$ annehmen kann. (Vergleiche dazu den schönen Beweis von ROSENBAUM, The American Mathematical Monthly *58*, 347 [1951]). Wie uns Herr THÉBAULT freundlicherweise mitteilt, hat zuerst G. FONTENÉ auf diesen Umstand aufmerksam gemacht (Nouvelles Annales de Mathématiques, 1900). Ferner hat Herr THÉBAULT in einem Artikel (Mathesis 1924) diese Frage untersucht und einen Beweis von CL. SERVAIS veröffentlicht, wonach zwischen den Grössen d, R und r im allgemeinen überhaupt keine Beziehung besteht.

Aufgabe 116. *a*) Démontrer que pour qu'un nombre entier complexe $x + y\,i$ (c'est-à-dire tel que x et y sont des entiers ordinaires) soit une somme de deux carrés de nombres entiers complexes, il faut et il suffit que y soit un nombre pair et que, dans le cas où $x \equiv 2 \pmod 4$, le nombre y soit divisible par 4.

b) Démontrer que pour qu'un nombre entier complexe $x + y\,i$ soit une somme de trois carrés de nombres entiers complexes, il faut et il suffit que y soit un nombre pair.

W. SIERPIŃSKI, Varsovie.

Lösung: *a*) Ist

$$x + y\,i = (a + b\,i)^2 + (c + d\,i)^2 = a^2 + c^2 - b^2 - d^2 + 2\,i\,(a\,b + c\,d), \tag{1}$$

dann ist notwendig $y = 2\,(a\,b + c\,d) \equiv 0 \pmod 2$. Ist $x + y\,i = 4\,u + 2 + 2\,i\,v$, dann ist wegen (1)

$$x = a^2 + c^2 - b^2 - d^2 \equiv 2 \pmod 4. \tag{2}$$

Wegen $a^2 \equiv 0$ oder $\equiv 1 \pmod 4$ gilt (2) nur, wenn a, c gerade und b, d ungerade sind oder wenn b, d gerade und a, c ungerade sind. In beiden Fällen ist

$$y = 2(a b + c d) \equiv 0 \pmod 4.$$

Die folgenden Gleichungen zeigen, dass diese notwendigen Bedingungen auch hinreichend sind.

$$x + y i = 4 u + 2 + 4 v i = [u - v + 1 + (u + v) i]^2 + [u + v + 1 + (v - u) i]^2,$$

$$x + y i = 2 u + 1 + 2 v i = (u + 1 + v i)^2 + (v - u i)^2,$$

$$x + y i = 4 u + 2(2 v + 1) i = [u - v + (u + v) i]^2 + [u + v + 1 + (v - u + 1) i]^2,$$

$$x + y i = 4 u + 4 v i = (u + 1 + v i)^2 + [v + (1 - u) i]^2.$$

b) Ist

$$x + y i = (a + b i)^2 + (c + d i)^2 + (e + f i)^2 = a^2 + c^2 + e^2 - b^2 - d^2 - f^2 + 2 i (a b + c d + e f),$$

dann ist notwendig $y = 2(a b + c d + e f) \equiv 0 \pmod 2$.

Die folgenden Gleichungen zeigen, dass diese Bedingung auch hinreichend ist.

$$x + y i = 2 u + 1 + 2 v i = 2^2 + (u - 1 + v i)^2 + [v + (2 - u) i]^2,$$

$$x + y i = 2 u + 2 v i = 1^2 + (u + v i)^2 + [v + (1 - u) i]^2.$$

R. LAUFFER, Graz.

Eine weitere Lösung sandte F. GOLDNER, London.

Aufgabe 117. Drei Kreise, deren Radien bzw. 1, 2, 3 Einheiten messen, berühren sich zu je zweien von aussen. Man berechne den Radius desjenigen Kreises, der von den drei gegebenen Kreisen von innen berührt wird. F. GOLDNER, London.

Lösung: Wir betrachten den allgemeinen Fall von drei *beliebigen* Kreisen mit den Zentren M_1, M_2, M_3 und den Radien r_1, r_2, r_3, die sich paarweise von aussen berühren. Dazu leiten wir zunächst eine Beziehung zwischen den Seiten eines vollständigen Vierecks $OABC$ ab. Es sei $OA = u$, $OB = v$, $OC = w$, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, dann gilt ohne Rücksicht auf eine spezielle Figur bei richtiger Vorzeichenwahl

$$\cos(a b) = \cos[(a w) \pm (b w)] = \cos(a w) \cos(b w) \mp \sin(a w) \sin(b w),$$

$$\sin^2(a w) \sin^2(b w) - [\cos(a b) - \cos(a w) \cos(b w)]^2 = 0. \tag{1}$$

Der Kosinussatz ergibt

$$\cos(a w) = \frac{a^2 + w^2 - v^2}{2 a w}, \quad \cos(b w) = \frac{b^2 + w^2 - u^2}{2 b w}, \quad \cos(a b) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 a b}. \tag{2}$$

Wir setzen (2) in (1) ein, multiplizieren mit $16 a^2 b^2 w^4$ und erhalten

$$[4 a^2 w^2 - (a^2 + w^2 - v^2)^2] [4 b^2 w^2 - (b^2 + w^2 - u^2)^2]$$
$$- [2 w^2 (a^2 + b^2 + c^2) - (a^2 + w^2 - v^2)(b^2 + w^2 - u^2)]^2 = 0.$$

Rechnet man aus und dividiert durch $4 w^2$, so ergibt sich

$$a^2 u^2 (b^2 + v^2 + c^2 + w^2 - a^2 - u^2) + b^2 v^2 (a^2 + u^2 + c^2 + w^2 - b^2 - v^2)$$
$$+ c^2 w^2 (a^2 + u^2 + b^2 + v^2 - c^2 - w^2) - [(a b c)^2 + (a v w)^2 + (u b w)^2 + (u v c)^2] = 0. \tag{3}$$

Ist nun $A = M_1$, $B = M_2$, $C = M_3$ und bedeutet O den Mittelpunkt und x den Radius des kleinen innern Kreises, der mit den drei gegebenen Kreisen äussere Berührung hat, so ist

$$a = r_2 + r_3, \quad b = r_3 + r_1, \quad c = r_1 + r_2, \quad u = r_1 + x, \quad v = r_2 + x, \quad w = r_3 + x.$$

Setzen wir diese Werte in (3) ein, so folgt nach einiger Rechnung

$$\begin{aligned}&[(r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1)^2 - 4\, r_1 r_2 r_3 (r_1 + r_2 + r_3)]\, x^2 \\ &- 2\, r_1 r_2 r_3 (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1)\, x + (r_1 r_2 r_3)^2 = 0\,.\end{aligned} \tag{4}$$

Die zweite Lösung y dieser quadratischen Gleichung gibt den Radius des grösseren äusseren Kreises, der von den drei gegebenen Kreisen von innen berührt wird. In diesem Fall ist zu setzen

$$u = y - r_1 = |r_1 + (-y)|, \quad v = |r_2 + (-y)|, \quad w = |r_3 + (-y)|.$$

Da u, v, w in (3) nur im Quadrat vorkommen, erkennt man sofort, dass auch $-y$ eine Lösung von (4) ist. Man erhält die Werte

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{r_1 r_2 r_3}{\pm (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1) + 2\sqrt{(r_1 + r_2 + r_3)\, r_1 r_2 r_3}}\,. \tag{5}$$

Die Quadratwurzel in (5) stellt die Fläche des Dreiecks $M_1 M_2 M_3$ dar, ferner ist das harmonische Mittel der Durchmesser der beiden gefundenen Kreise gleich dem Inkreisradius von $\triangle M_1 M_2 M_3$.

Für $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$ erhält man die Werte $x = 6/23$, $y = 6$. Die Formeln lassen sich auch leicht für den Fall aufstellen, wo einer der drei gegebenen Kreise die beiden andern einschliesst oder in eine Gerade übergeht. A. BAGER, Hjørring, Dänemark.

Ist wie im Spezialfall $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$ das Dreieck der Mittelpunkte rechtwinklig, so erhält man den Mittelpunkt Q des grösseren Kreises (Radius y), indem man das rechtwinklige Dreieck durch den Punkt Q zu einem Rechteck ergänzt, woraus sich y leicht bestimmen lässt. Das ist von mehreren Lösern bemerkt worden.

Weitere Lösungen sandten J. BINZ (Biel), H. FAEHNDRICH (Bern), F. GAYDON (Basel), L. KIEFFER (Luxemburg), L. KOVÁCS (Debrecen), H. KREIS (Winterthur, für allgemeines rechtwinkliges Mittelpunktsdreieck), R. LAUFFER (Graz), G. NEUWEILER (Olten), E. PLÜSS (Murgenthal), T. REICH (Glarus), A. UNTERBERGER (Bludenz).

Neue Aufgaben

149. Die Ecken eines Würfels sind die Spitzen von acht dem Würfel einbeschriebenen Drehkegeln. Man berechne das Volumen des Körpers, der von den acht Kegeln begrenzt ist (vgl. Nr. 63). L. KIEFFER, Luxemburg.

150. Man bestimme eine Parabel, die zwei gegebene Kreise doppelt berührt. Die Aufgabe hat Bedeutung für die Festigkeitslehre (Sicherheitsparabel zu zwei Mohrschen Spannungskreisen, Vergleich zweier Werkstoffe). F. HOHENBERG, Graz.

151. Bei der Berechnung der Induktion eines kreisförmigen Leiters in einem Punkt im Innern des Kreises wird man auf

$$\int_0^\pi \frac{1 - \lambda \cos\alpha}{(1 + \lambda^2 - 2\,\lambda \cos\alpha)^{3/2}}\, d\alpha, \qquad (\lambda < 1)$$

geführt. Das Integral ist auszuwerten. W. LÜSSY, Winterthur.

152. *a*) Trouver tous les nombres premiers de la suite infinie

$$101, \quad 10101, \quad 1010101, \quad 101010101, \quad \ldots .$$

b) Combien de nombres premiers contiennent les suites infinies

$$1001, \quad 1001001, \quad 1001001001, \quad \ldots$$

et

$$10001, \quad 100010001, \quad 1000100010001, \quad \ldots .$$

W. Sierpiński, Varsovie.

153. $2N$ sei die (grosse) Anzahl der Elemente eines Kollektivs, in welchem in gleichen Zeitintervallen immer wieder zwei Elemente in völlig ungeordneter und gleichberechtigter Weise zur Berührung kommen. Auf Grund dieser Annahme kann man den Zeitraum von einem solchen Kontakt bis zum nächsten als Zeiteinheit wählen und bei der Betrachtung solcher «Kontaktpaare» die Gesetze der klassischen Wahrscheinlichkeit anwenden. Ferner sei M ein Merkmal, welches stets und nur dann auf ein merkmalfreies Element übergeht, wenn letzteres mit einem bereits das Merkmal tragenden Element Kontakt bekommt. Dadurch wird und verbleibt dieses Element Merkmalträger.

Welche Funktion des Zeitablaufs beschreibt *durchschnittlich* die Merkmalausbreitung im Kollektiv bei hinreichend grossem N? [1]) A. Unterberger, Bludenz.

154. Zeige, dass neben dem bekannten Satz

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \cdots = \frac{\pi}{4},$$

auch gilt

$$\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{1}{7 \cdot 9 \cdot 11} + \frac{1}{13 \cdot 15 \cdot 17} \mp \cdots = \frac{\pi}{48}.$$

B. van der Pol, Genf.

Berichtigung. In Aufgabe 145 muss die Bedingung lauten:

$$\overline{\lim} \log n_k / \log k = \infty \qquad \text{statt} \qquad \overline{\lim}\, n_k / \log k = \infty .$$

Literaturüberschau

B. S. Ray: *Differential Calculus*

236 Seiten, Dasgupta & Co., Kalkutta 1950

Das vom Dozenten für angewandte Mathematik an der Universität Kalkutta verfasste Buch ist bestimmt für einen «undergraduate», der das Studium der «higher» Mathematik beginnt. Knappem, aber sauberem Entwickeln und Formulieren von Begriffen und Sätzen folgen Beispiele, Hinweise auf vorteilhafte Ansätze in numerischen Problemen, und «praktische» Fassung von Sätzen, die für die numerische Anwendung wichtig sind. Der Leser findet nach jedem Abschnitt viele Übungsaufgaben und am Schluss des Buches die Ergebnisse. Das flüssig geschriebene, jedoch für Studierende keine überflüssigen Erläuterungen enthaltende Werk ist übersichtlich aufgebaut: sorgfältige Behandlung des Limes- und Stetigkeitsbegriffes (Abschnitte 1, 2); Begriff und Technik des Differenzierens (3 bis 7); Reihen, wobei immer wieder der Grenzwert gegenüber der Addition hervorgehoben wird (8, 9); Anwendungen auf Kurven (10 bis 15). Der Verfasser möchte wissenschaftliche Strenge – soweit sie für eine Anfängervorlesung ratsam ist – vereinigen mit numerischer Anwendbarkeit des vorgetragenen Stoffes. Dieses Ziel hat er erreicht. – Das vorzüglich ausgestattete indische Buch ist in klarem Druck erschienen. A. Häusermann.

[1]) Vgl. E. Roth-Desmeules, *Der Hyperbeltangens in der Biologie*, El. Math. *6*, 15 (1951).