

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Band: 7 (1952)
Heft: 4

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 20.11.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

E_A der Grösse dieser Art und eines (dimensionslosen) Tensors m -ter Stufe $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_m}$ ($i = 1, 2, 3$), dessen Koordinaten die Masszahlen der Koordinaten von $A_{i_1 i_2 \dots i_m}$ bezüglich E_A sind, dargestellt werden. Letzterer kann dann noch als Produkt einer Zahl α und eines Einstensors, das heisst eines dimensionslosen Tensors m -ter Stufe, dessen Betrag eins ist, angegeben werden ($A_{i_1 i_2 \dots i_m} = \alpha E_A \cdot 1_{i_1 i_2 \dots i_m}$; zum Beispiel Richtungskosinus $\cos \alpha_i = e_i$ eines Vektors). Dann kann mit diesen Symbolen, falls die angegebenen Einschränkungen beachtet werden, nach den Regeln der gewöhnlichen Arithmetik und des Tensorkalküls gerechnet werden. Auch hier zeigt sich die Unzweckmässigkeit des üblichen symbolisch-anschaulichen Vektorkalküls, der diese «Permanenz» nicht zulässt (sogenannte innere und äussere «Produkte»). Verwendet man affine Koordinatensysteme (Achsen verschieden geeicht und schiefwinklig), so tritt an Stelle der invarianten Form $x_i x_i$ die metrische Grundform $g_{ik} x_i x_k$, das heisst als (dimensionsloser) metrischer Fundamentaltensor g_{ik} , statt des Einheits-tensors $\delta_{ij} = 1$ ($i = j$) bzw. 0 ($i \neq j$) zweiter Stufe, der übrigens nur beim Übergang von kontra- zu kovarianten Koordinaten vorkommt.

Überblicken wir nochmals den Gedankengang, so erscheint die Grössengleichung als das Ursprüngliche. Der Psychologe, Genetiker und Erkenntnistheoretiker wird vielleicht geneigt sein, zu sagen, wir rechnen mit Zahlen wie mit Grössen – und nicht umgekehrt. Doch das geht über die in der Mathematik übliche Analyse der Relationensysteme auf Grund einer *a priori* gegebenen Logik hinaus.

K. OTT, Zürich.

Kleine Mitteilungen

Zur Konstruktion der Achsen einer Ellipse aus einem Paar konjugierter Durchmesser

Die Konstruktion der Achsen einer Ellipse aus einem Paar konjugierter Durchmesser mit Hilfe der perspektiven Affinität stützt sich bekanntlich auf die Aufsuchung eines zugeordneten Paares rechter Winkel, deren Scheitel der Mittelpunkt der Ellipse und der Mittelpunkt eines passenden affinen Kreises sind. Dabei wird die Affinitätsachse so gewählt, dass diese Scheitel nicht zusammenfallen (siehe FLÜKIGER oder E. MÜLLER, Band 1). Es gibt indes eine interessante Möglichkeit, die Aufgabe zu lösen, wenn die erwähnten Mittelpunkte zusammenfallen, insbesondere wenn als Affinitätsachse die Gerade eines der gegebenen konjugierten Durchmesser gewählt wird; eine Möglichkeit, die nebst einer neuen Konstruktion einen neuen Zugang zur Rytzschen Konstruktion erschliesst.

Wir lösen vorerst, *absichtlich elementar*, die Hilfsaufgabe:

Bei gegebener Affinitätsrichtung, gegebener Affinitätsachse und gegebenem Affinitätsverhältnis soll das perspektiv-affine Rechtwinkelpaar konstruiert werden, dessen gemeinsamer Scheitel S auf der Affinitätsachse gegeben ist.

Seien $\sphericalangle(a_1, b_1)$ und $\sphericalangle(a_2, b_2)$, wobei $a_1 \perp b_1$ und $a_2 \perp b_2$, die gesuchten rechten Winkel und g irgendeine Gerade in der Affinitätsrichtung, welche ihre Schenkel schneidet. Dann müssen die Schnittpunkte A_1, A_2 bzw. B_1, B_2 (Figur 1) von g mit a_1 und a_2 bzw. mit b_1 und b_2 zugeordnete Punkte sein. Zieht man beispielsweise durch A_1 die Gerade \bar{a}_2 parallel zu a_2 und ist T ihr Schnittpunkt mit der Affinitätsachse s , so gilt $AA_2/AA_1 = AS/AT$, wenn A der Schnittpunkt von g mit s ist. Nun ist aber auch

$AB_2/AB_1 = AA_2/AA_1$. Daher $AB_2/AB_1 = AS/AT$, und somit muss die B_1 und T verbindende Gerade \bar{b}_2 parallel zu b_2 sein. Hieraus folgt nun zweierlei: erstens $\bar{a}_2 \perp \bar{b}_2$, zweitens die Konstruierbarkeit der Lage des Punktes T , weil AS/AT gleich dem Wert des gegebenen Affinitätsverhältnisses ist. Andererseits sieht man von S und T aus die Strecke A_1B_1 je unter einem rechten Winkel, folglich liegen die Punkte A_1, B_1, S und T auf einem Kreise mit Mittelpunkt auf g , woraus die Konstruktion des Rechtwinkelpaares unmittelbar folgt. In Figur 2 ist diese Konstruktion unter der Annahme

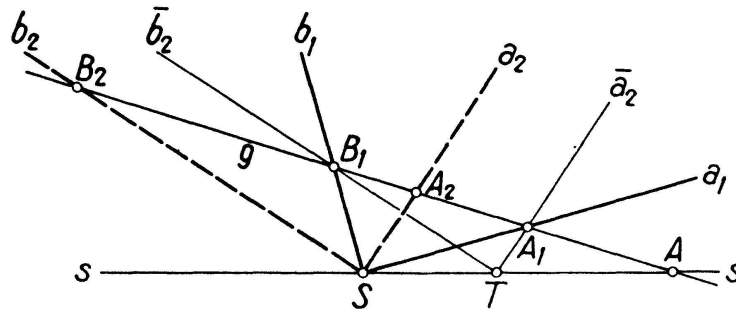


Fig. 1

durchgeführt worden, dass ein beliebiges zugeordnetes Punktepaar P_1 und P_2 und der Scheitel S auf s gegeben sind. A_1S und B_1S ergeben den einen und die Parallelen durch S zu A_1T und B_1T den zugeordneten rechten Winkel.

Das eingangs formulierte Problem ist nun leicht zu lösen. Sind nämlich C_2D_2 und E_2F_2 die gegebenen konjugierten Ellipsendurchmesser, so mache man beispielsweise die

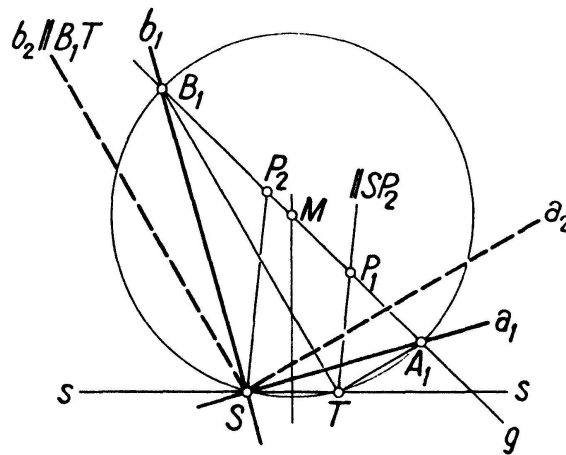


Fig. 2

Gerade E_2F_2 zur Affinitätsachse s , dann spielt der Ellipsenmittelpunkt die Rolle von S in der Hilfsaufgabe. Der zu C_2D_2 affine Kreisdurchmesser (Länge E_2F_2) ist C_1D_1 , somit sind C_1 und C_2 ein Paar zugeordneter Punkte, welche die Rolle von P_1 und P_2 der Hilfsaufgabe übernehmen. Die Gerade C_1C_2 ist als Gerade g zu deuten. Zieht man nun durch C_1 (Figur 3) bzw. C_2 (Figur 4) die Parallele zu C_2S bzw. C_1S , so ergibt ihr Schnittpunkt mit s den Punkt T , und so weiter.

Die Figur 3 enthält die neue Konstruktion, während die Figur 4 direkt auf die Rytzsche Konstruktion führt.

Anmerkung. Der Figur 4 lassen sich durch Anbringen einiger Hilfslinien (Q_1Q_2 bzw. V_1V_2 verlängert bis zum nochmaligen Schnitt mit Kreis über E_2F_2 ; den neuen Schnittpunkt \bar{Q}_1 bzw. \bar{V}_1 mit S verbunden, ferner die Gerade B_2T eingezeichnet, siehe Figur 5) die bekannten Rytzschen Beziehungen: $C_1B_2 = SV_2$ und $C_1A_2 = SQ_2$ leicht entnehmen

men. Die erste folgt aus der Kongruenz der Dreiecke SB_2C_1 und $SV_2\bar{V}_1$. Es ist nämlich $SC_1 = S\bar{V}_1$, $\varepsilon = \varepsilon'$ (korrespondierende Winkel an Parallelen) und $\gamma' = \sphericalangle \bar{V}_1$. Letzteres ist so einzusehen: $\gamma = \bar{\gamma}$ (Peripheriewinkel über $\widehat{A_2T}$), aber $\gamma = \gamma'$ (gleichufrige Normalwinkel) und $\bar{\gamma} = \sphericalangle V_1$ (gleichsinnige Parallelwinkel, ist doch $\sphericalangle B_2TA_2 = 90^\circ$) und schliesslich $\sphericalangle V_1 = \sphericalangle \bar{V}_1$.

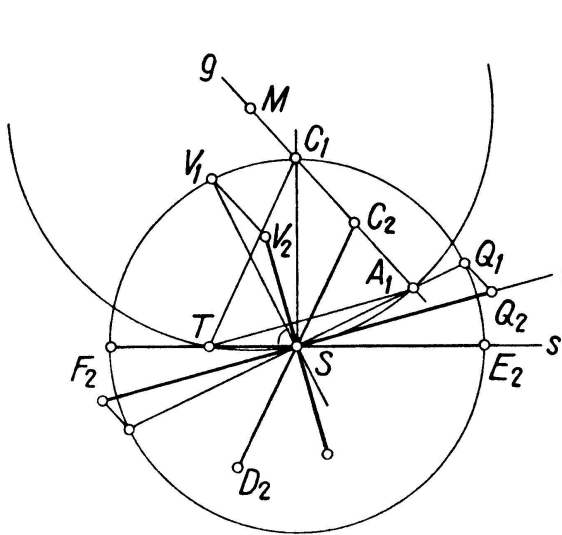


Fig. 3

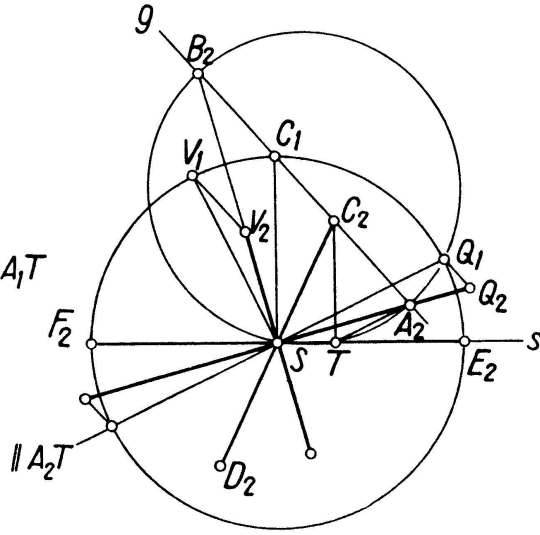


Fig. 4

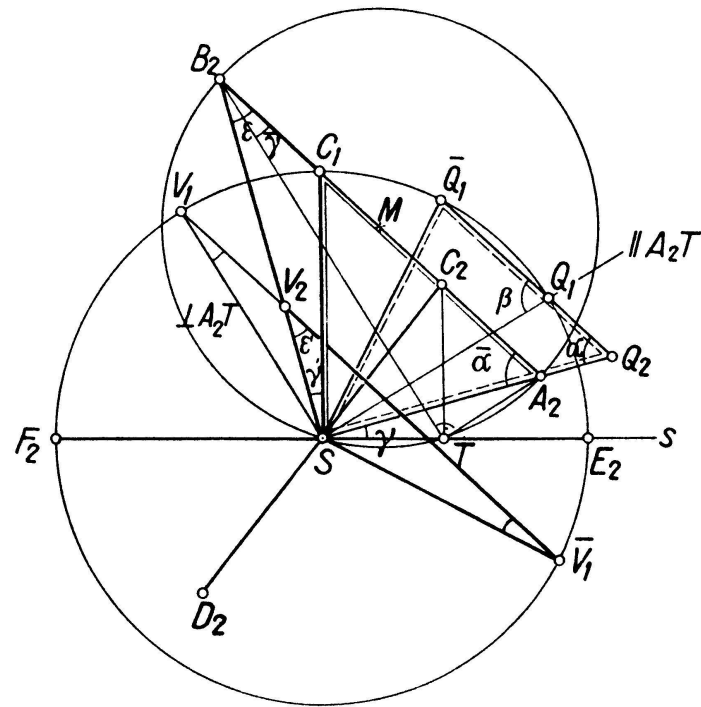


Fig. 5

Die zweite Beziehung folgt aus der Kongruenz der Dreiecke C_1SA_2 und $SQ_2\bar{Q}_1$. Es ist nämlich $S\bar{Q}_1 = SC_1$, ferner $\alpha = \bar{\alpha}$ und $\sphericalangle \bar{Q}_1 = \sphericalangle C_1SA_2$. Letzteres ist so einzusehen: $\sphericalangle C_1SA_2 = 90^\circ - \gamma$, aber $\sphericalangle \bar{Q}_1 = \beta$ und $\beta = \sphericalangle B_2A_2T$ (gleichsinnige Parallelwinkel) und schliesslich $\sphericalangle B_2A_2T = 90^\circ - \bar{\gamma} = 90^\circ - \gamma$.

V. KRAKOWSKI, Zürich.

Zu einer Formel in der Voellmyschen Logarithmentafel

Wir betrachten die allgemeine Kurve zweiter Ordnung

$$A x^2 + 2 B x y + C y^2 + 2 D x + 2 E y + F = 0$$

für den «parabolischen» Fall

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 0.$$

Dann erhalten wir durch eine Rotation des Koordinatensystems:

$$x = \bar{x} \cos \alpha - \bar{y} \sin \alpha,$$

$$y = \bar{x} \sin \alpha + \bar{y} \cos \alpha,$$

mit

$$\cos 2 \alpha = \frac{C - A}{C + A}, \quad \sin 2 \alpha = -\frac{2 B}{C + A},$$

die Gleichung

$$(A + C) \bar{y}^2 + 2 d \bar{x} + 2 e \bar{y} + F = 0,$$

wo

$$d^2 = -\frac{\Delta}{A + C} \quad \text{und} \quad e^2 = D^2 + E^2 + \frac{\Delta}{A + C},$$

mit

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Im ausgearteten Falle, $\Delta = 0$, haben wir also die Gleichung eines Parallelenpaares:

$$(A + C) \bar{y}^2 + 2 e \bar{y} + F = 0$$

mit

$$e^2 = D^2 + E^2.$$

Die Diskriminante dieser quadratischen Gleichung ist

$$\begin{vmatrix} A + C & e \\ e & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C & E \\ E & F \end{vmatrix},$$

und die beiden Parallelen sind demnach

$$\left. \begin{array}{l} \text{reell und verschieden} \\ \text{zusammenfallend} \\ \text{imaginär} \end{array} \right\} \text{ für } \begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C & E \\ E & F \end{vmatrix} \begin{cases} < 0 \\ = 0. \\ > 0 \end{cases}$$

Aus dem skizzierten Beweis folgt, dass dieses Kriterium ohne Fallunterscheidung anwendbar ist, und ich möchte deshalb vorschlagen, es an der entsprechenden Stelle der Formelsammlung unserer Logarithmentafel (Diskussion der Kegelschnitte als Kurven zweiter Ordnung) zu verwenden. Die Möglichkeit eines Missverständnisses,

wenn eine der Determinanten $\begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix}$ oder $\begin{vmatrix} C & E \\ E & F \end{vmatrix}$ Null ist, würde damit behoben.

OSWALD WYLER, Evanston (Ill., USA.)