nicht unterschreiten. Wir zeigen jetzt, dass hieraus $r \geqq \sqrt{2}$ folgt[1]). Sind a, b, c, d, e die 5 Einheitsvektoren, die von Z ausgehend nach den 5 Punkten A, B, C, D, E hinweisen, so gelten die Zerlegungen $a = (a, e)\, e + a'$; $b = (b, e)\, e + b'$; $c = (c, e) + c'$; $d = (d, e)\, e + e'$, wo a', b', c', d' Vektoren bezeichnen, welche in Z angreifen und in der auf e orthogonal stehenden Ebene liegen. Da die vier konsekutiven Zwischenwinkel dieser koplanaren Vektoren nicht alle $\pi/2$ überschreiten können, darf man ohne Einschränkung der Allgemeinheit etwa $(a', b') \geqq 0$ annehmen. Es ergibt sich jetzt $(a, b) \geqq (a, e)\,(b, e)$. Hieraus folgt aber, dass die drei hier beteiligten Skalarprodukte nicht alle negativ sein können. Also ist etwa $(a, b) \geqq 0$. Ist ε der Winkel im Dreieck AZB bei Z, so ist $\cos\varepsilon \geqq 0$ und da ja $|ZA| = |ZB| = r$ und $|AB| \geqq 2$ sein muss, ergibt die Anwendung des Kosinussatzes $r \geqq \sqrt{2}$. So folgt nun

$$R_5 \geqq 1 + \sqrt{2}. \tag{b}$$

Mit (a) schliessen wir daraus auf $R_5 = 1 + \sqrt{2}$, was zu beweisen war.

Endlich wollen wir noch zeigen, dass $R_5 = R_6$ ausfällt. Damit ist ein Fall aufgewiesen, wo in der Folge der Grenzradien R_n zwei konsekutive übereinstimmen. Ob sich dieses Vorkommnis im weiteren Verlauf der Folge wiederholt, ist unseres Wissens nicht bekannt. Wir gehen vom günstigen Aggregat für 5 Kugeln (Figur 3) aus. Die Kugel K^0 vom Radius R_5 mit dem Mittelpunkt Z im Zentrum des Basisquadrates $ABCD$ enthält mit den 5 Einheitskugeln um die Punkte A, B, C, D, E noch eine weitere, nämlich die Einheitskugel um E', wo E' den bezüglich der Quadratebene zu E spiegelbildlichen Punkt bedeutet. Somit ist (a): $R_5 \geqq R_6$; weiter hat man mit Rückblick auf (6) noch (b): $R_5 \leqq R_6$. Hieraus ergibt sich die Behauptung $R_5 = R_6$.

H. HADWIGER, Bern.

Elementare Bestimmung der Summe der reziproken Quadratzahlen

Die Geschichte der Reihe

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots \tag{1}$$

findet der Leser in einer Abhandlung von O. SPIESS[2]). Berühmt geworden ist der Beweis von EULER, der sich auf das unendliche Produkt für $\sin x$ stützt und auf dasselbe die Vietaschen Wurzelsätze anwendet. SPIESS bemerkt, dass dieser Beweis nur mit funktionentheoretischen Mitteln streng erbracht werden könne.

Ich teile daher hier eine elementare Gestaltung der Eulerschen Beweisidee mit, die ich vor mehreren Jahren gefunden habe.

[1]) Dies folgt aus den wenigen bekannten Aussagen über den sphärischen Minimalabstand bei n auf der Kugeloberfläche verstreut liegenden Punkten bzw. über den grösstmöglichen Wert, den dieser noch annehmen kann. Zahlreiche neue Ergebnisse wurden hier kürzlich von B. L. VAN DER WAERDEN (Zürich) und K. SCHÜTTE (Marburg an der Lahn) erzielt: *Auf welcher Kugel haben 5, 6, 7, 8 oder 9 Punkte mit Mindestabstand Eins Platz?*, Math. Ann. *123*, 96–124 (1951). Vgl. die Besprechung von E. TROST, El. Math. *7*, 23 (1952).

[2]) Speiser-Festschrift (Orell Füssli, Zürich 1945).

Den Ausgangspunkt bildet die Formel

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) = \frac{\Sigma \operatorname{tg}\alpha_1 - \Sigma \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{tg}\alpha_3 + \cdots}{1 - \Sigma \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 + \cdots},} \tag{2}$$

wobei die Σ in der üblichen Weise die symmetrischen Grundfunktionen der n Werte $\operatorname{tg}\alpha_1, \ldots, \operatorname{tg}\alpha_n$ bezeichnen. Ein natürlicher Beweis für diese Formel ergibt sich durch den Schluss von n auf $n+1$, ausgehend vom geläufigen Fall $n = 2$.

Setzt man nun in (2) alle α_i einander gleich, so folgt:

$$\operatorname{tg}(n\,\alpha) = \frac{\binom{n}{1}\operatorname{tg}\alpha - \binom{n}{3}\operatorname{tg}^3\alpha + \cdots}{1 - \binom{n}{2}\operatorname{tg}^2\alpha + \cdots} = \frac{Z_n}{N_{n-1}}. \tag{3}$$

Wir setzen nun ein für allemal fest, *n sei eine ungerade Zahl:*

$$n \equiv 1 \pmod 2). \tag{4}$$

Dann sind Z_n und N_{n-1} Polynome in $\operatorname{tg}\alpha$ vom Grade n bzw. $n-1$. Wir setzen weiter

$$\alpha = \frac{m\,\pi}{2\,n} \tag{5}$$

und lassen m alle ganzen Zahlen von 0 bis $2\,n - 1$ durchlaufen mit Ausnahme des Wertes n. Demnach durchläuft also m die Serie

$$m = 0, 1, \ \ldots, \ n-1; \quad n+1, \ \ldots, \ 2\,n-1. \tag{6}$$

Diese Serie enthält die n geraden Zahlen

$$m = 2\,k \qquad (k = 0, 1, 2, \ \ldots, \ n-1) \tag{7}$$

und daneben $n - 1$ ungerade Zahlen.

Offenbar sind die durch die Serie (6) aus (5) hervorgehenden $2\,n - 1$ Werte $\operatorname{tg}\alpha$ alle endlich und voneinander verschieden. Ausserdem gilt folgendes: $\operatorname{tg}(n\,\alpha)$ wird unendlich für die ungeraden Werte der Serie (6) und Null für die geraden Werte. Nun erhalten wir durch elementare algebraische Schlüsse folgendes Ergebnis:

Das Polynom

$$Z_n(\operatorname{tg}\alpha) \equiv \binom{n}{1}\operatorname{tg}\alpha - \binom{n}{3}\operatorname{tg}^3\alpha + \cdots$$

besitzt die n verschiedenen Nullstellen

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{k\,\pi}{n}\right). \qquad (k = 0, 1, 2, \ \ldots, \ n-1)$$

Setzen wir also

$$a_k = n \operatorname{tg}\left(\frac{k\,\pi}{n}\right), \tag{8}$$

so erhalten wir wegen

$$a_{n-k} = -a_k$$

als leichte Modifikation dieses Ergebnisses den

Satz: Das Polynom

$$P_{\frac{n-1}{2}}(x) \equiv 1 - \binom{n}{3}\frac{x}{n^3} + \binom{n}{5}\frac{x^2}{n^5} - \cdots \tag{9}$$

besitzt die Nullstellen

$$x = a_k^2. \qquad \left(k = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}\right) \tag{10}$$

Wendet man jetzt den ersten Vietaschen Wurzelsatz auf die Reziproken an, so folgt gemäss (8)

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n^2 \operatorname{tg}^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \frac{1}{n^3}\binom{n}{3}.} \tag{11}$$

Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{k\pi} \operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 1$$

liegt nun die Vermutung auf der Hand, dass aus der Formel (11) die Reihe (1) folgen werde.

Die korrekte Abschätzung kann ganz im Rahmen der elementaren Analysis vollzogen werden. Beachtenswert ist dabei der Umstand, dass der überwiegende Anteil der Summanden in (11) gegen Null strebt. Wir müssen daher die Summe in zwei Teile zerlegen, von denen der erste einen endlichen Wert, der zweite aber Null liefert. Für diesen Zweck geeignet ist der Index μ gemäss

$$\sqrt{n} - 1 < \mu \leqq \sqrt{n}. \tag{12}$$

In diesem Sinne schätzen wir nun die Differenz ab:

$$\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left\{\frac{1}{k^2\pi^2} - \frac{1}{n^2 \operatorname{tg}^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right\} = \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{k^2\pi^2}\left\{1 - \frac{1}{\left[\frac{n}{k\pi}\operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right]^2}\right\}. \tag{13}$$

Setzen wir abkürzend

$$A_k = \frac{n}{k\pi}\operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{n}\right), \tag{14}$$

so erhalten wir leicht

$$0 < \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{1}{A_k^2}\right)\frac{1}{k^2\pi^2} < \sum_{k=1}^{\mu}\left(1 - \frac{1}{A_k^2}\right)\frac{1}{k^2\pi^2} + \sum_{k=\mu+1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{k^2\pi^2}. \tag{15}$$

Da aber A_k mit k monoton wächst, folgt weiter

$$\sum_{k=1}^{\mu}\left(1 - \frac{1}{A_k^2}\right)\frac{1}{k^2\pi^2} < \left(1 - \frac{1}{A_\mu^2}\right)\sum_{k=1}^{\mu}\frac{1}{k^2\pi^2}. \tag{16}$$

Offenbar gilt nun aber

$$\lim_{n\to\infty} A_\mu^2 = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{\mu\,\pi}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\mu\,\pi}{n}\right)\right]^2 = 1. \tag{17}$$

Wenden wir also (16) und (17) auf (15) an, so folgt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{1}{A_\mu^2}\right) \frac{1}{k^2\,\pi^2} = 0 \tag{18}$$

oder, ausgeschrieben gemäss (14) und (13),

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left\{\frac{1}{k^2\,\pi^2} - \frac{1}{n^2\,\mathrm{tg}\left(\frac{k\,\pi}{n}\right)}\right\} = 0.$$

Nach Multiplikation mit π^2 ergibt sich daher unter Beachtung von (11)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \tag{19}$$

womit die Begründung von (1) vollendet ist.

Nach demselben Verfahren erhält man natürlich auch die Reihen der reziproken geraden Potenzen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p}} = \frac{2^{2p-1}\,\pi^{2p}\,B_p}{(2p)!}. \tag{20}$$

Durch passende Auswertung der Gleichung (3) gelingt es überdies, die Partialbruchreihen

$$\mathrm{ctg}\,(\pi\,x) = \frac{1}{\pi\,x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\,x}{\pi\,(x - k^2)} \tag{21}$$

und

$$\frac{1}{\sin\,(\pi\,x)} = \frac{1}{\pi\,x} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\,x}{x^2 - k^2} \tag{22}$$

sowie ihre zu (20) analogen Verallgemeinerungen zu gewinnen.

W. SCHERRER, Bern.

Kleine Mitteilungen

Einteilung der Dreiecksformen

Vorbemerkung

Die klassische Einteilung der Dreiecke in spitzwinklige und stumpfwinklige hat den Vorzug grösster Einfachheit und unmittelbarer Erkennbarkeit. Sie ist nur insofern nicht restlos befriedigend, als sie leicht zu der Meinung verleitet, es gäbe ungefähr ebenso viele spitzwinklige wie stumpfwinklige Dreiecke.