

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Band:** 8 (1953)  
**Heft:** 1

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 19.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

kinematisch: Geraden  $g, \bar{g}$ , deren linke Bildpunkte  $G_l, \bar{G}_l$  bezüglich der Bildgeraden  $n_l$  des Nebengewindes  $\mathfrak{G}_l$  symmetrisch liegen, das heisst Geraden  $g, \bar{g}$ , die *bezüglich des Nebengewindes  $\mathfrak{G}_l$  nullpolar* sind.

Die Notwendigkeit der Orientierung der Kugeln hat zuerst (1897) E. STUDY<sup>1)</sup> erkannt, der auch als erster (1926) eine völlig einwandfreie analytische Darstellung der (euklidischen) Geraden-Kugel-Transformation gegeben hat<sup>2)</sup>, die mit unserem geometrischen Modell in Übereinstimmung ist.

Man kann in der gleichen Weise die Liesche Kreisgeometrie auf der Kugel und die *nichteuklidische Geraden-Kugel-Transformation geometrisch-konstruktiv begründen*, indem man sich der *Kinematik der Kugel* und ihres (*elliptischen*) *Parameterraumes* bedient, wie ich schon 1930 gezeigt habe<sup>3)</sup>.

Das *euklidische Modell* findet sich schon in einer aus der gleichen Zeit stammenden *Wiener Dissertation* von A. E. MAYER<sup>4)</sup>, die jedoch nicht zugänglich ist und über die auch nichts veröffentlicht wurde.

Ich selbst habe im Winter- und Sommersemester 1935/36 den Gegenstand in einer *Wiener Vorlesung über «Neuere Kinematik»* ausführlich dargelegt. Im Jahre 1948 hat W. BLASCHKE<sup>5)</sup> in den «Münchener Sitzungsberichten» und 1949 in den «Rendiconti di matematica» darüber veröffentlicht. KARL STRUBECKER, Karlsruhe.

## Kleine Mitteilungen

### Sur une démonstration géométrique d'un théorème de M. D. Pompeïu

M. D. POMPEÏU a démontré, à l'aide des nombres complexes, ce théorème de géométrie élémentaire<sup>6)</sup>:

Dans le plan, on peut toujours construire un triangle avec les distances d'un point aux sommets d'un triangle équilatéral.

Nous montrerons ici que l'on peut déduire ce théorème de la proposition suivante:

*Dans le plan, le lieu géométrique des sommets  $Q$  des triangles  $PTQ$ , directement semblables à un triangle donné  $ABC$  et dont les deux sommets  $P$  et  $T$  sont sur deux circonférences  $O_1$  et  $O_2$ , est un anneau fermé.*

1° Soient donnés le triangle  $ABC$  et les deux circonférences de centres  $O_1, O_2$  et de rayons  $a, b$  (figure 1), avec  $a < b$ .

Construisons d'abord  $\triangle O_1 O_2 K \sim \triangle ABC$ ,  $\overline{O_1 O_2} = m$ ,  $\overline{O_1 K} = l$ ,  $\overline{O_2 K} = n$ , et ensuite les triangles  $O_1 M O$  et  $R_1 M R_2$  semblables au triangle donné, les points  $R_1, M$  étant sur la droite  $O_1 O_2$ ,  $R_1$  sur la circonférence  $O_1$  et  $M$  sur la circonférence  $O_2$ .

<sup>1)</sup> Vgl. die ausführliche kritische Abhandlung von E. STUDY, *Über Lies Kugelgeometrie*, Jber. Dtsch. Math.-Ver. 25, 96–113 (1917).

<sup>2)</sup> EDUARD STUDY, *Vereinfachte Begründungen von Lies Kugelgeometrie I*, Sitz.-Ber. Preuss. Akad. Wiss., Berlin 1926, 360–380.

<sup>3)</sup> KARL STRUBECKER, *Zur nichteuklidischen Geraden-Kugel-Transformation*, Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien, Math.-naturw. Kl., Abt. IIa, 139, 685–700 (1930) und *Zur Geometrie sphärischer Kurvenscharen*, Jber. Dtsch. Math.-Ver. 44, 184–198 (1934).

<sup>4)</sup> ANTON ERNST MAYER, *Die kinematische Abbildung*, Dissertation, Techn. Hochschule Wien (1930).

<sup>5)</sup> W. BLASCHKE, *Kinematische Begründung von S. Lies Geraden-Kugeltransformation*, Sitz.-Ber. Bayer. Akad. Wiss. (München 1948), 291–297, und *Contributi alla cinematica*, Rend. Mat. Applicazioni [V] 8, 268–280 (1949).

<sup>6)</sup> D. POMPEÏU, *Une identité entre nombres complexes et un théorème de géométrie élémentaire*, Bull. Math. Phys. Ecole polytechn. Bucarest 6, 6–7 (1936).

Supposons qu'un sommet d'un triangle  $R'_1MR'_2$ , semblable au triangle  $ABC$ , soit en  $M$ , son deuxième sommet  $R'_1$  se trouvant, par hypothèse, sur la circonférence  $O_1$ .

Le lieu géométrique des points  $R_2, R'_2$  est la circonférence de centre  $O$  et de rayon  $r_1 = a n/m$ .

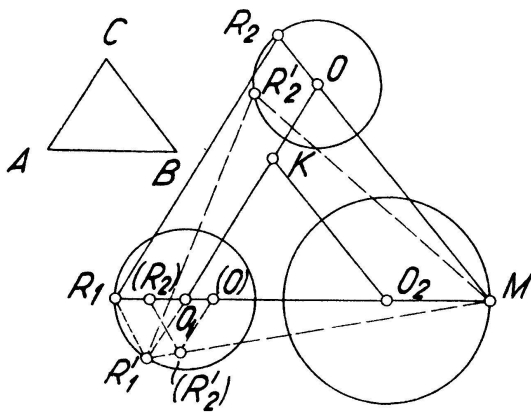


Fig. 1

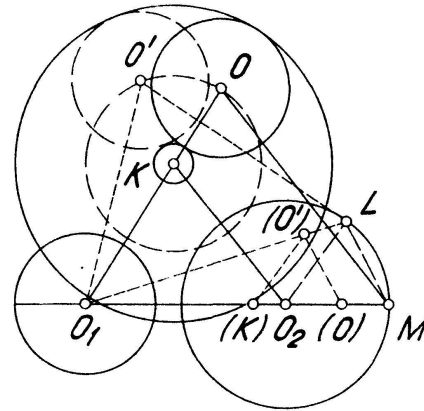


Fig. 2

On le voit en tournant le triangle  $R'_2MR_2$  jusqu'à ce que les droites  $R'_1M$  et  $R'_2M$  coïncident [le point  $O$  dans sa nouvelle position est désigné par  $(O)$ , de même pour les autres points].

Comme on a

$$\frac{M(R_2)}{M(R'_2)} = \frac{MR_1}{MR'_1}, \quad \frac{MR'_1}{MO_1} = \frac{M(R'_2)}{M(O)},$$

il suit

$$\frac{O_1R_1}{O_1R'_1} = \frac{OR_2}{OR'_2}$$

et comme  $O_1R_1/O_1R'_1 = 1$  par hypothèse, le lieu cherché est bien la circonférence de centre  $O$ . De la proportion

$$\frac{OR_2}{R_1O_1} = \frac{O_2K}{O_1O_2}$$

on obtient son rayon  $\overline{OR_2}, r_1 = a n/m$ .

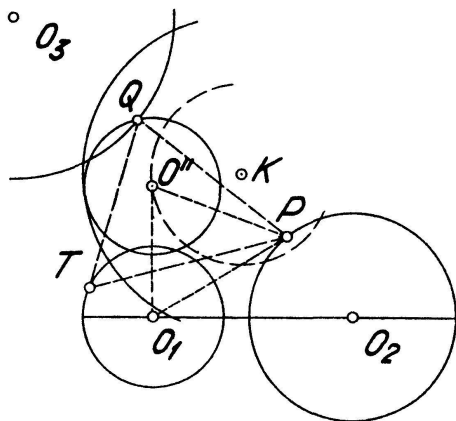


Fig. 3

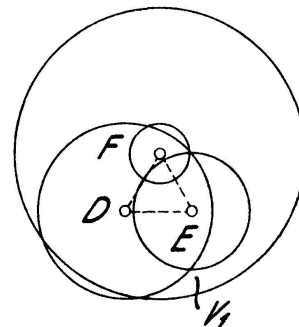


Fig. 4

Si les triangles semblables au triangle donné ont un sommet en un point quelconque  $L$  de la circonférence  $O_2$  (figure 2) et leurs deuxièmes sommets sur la circonférence  $O_1$ , on conclut comme précédemment que le lieu géométrique des troisièmes sommets est la circonférence de centre  $O'$  (sommet du triangle  $O_1LO' \sim \Delta ABC$ ) et de rayon  $r_1 = a n/m$ .

Les centres de ces deux circonférences sont sur la circonférence décrite autour du point  $K$  avec le rayon  $r_2 = b l/m$ .

On le montre en tournant  $\triangle O'O_1O$  jusqu'à la coïncidence des droites  $O_1O$  et  $O_1M$ .  
Des relations

$$\frac{O_1(O)}{O_1(O')} = \frac{O_1M}{O_1L}, \quad \frac{O_1(K)}{O_1(O')} = \frac{O_1O_2}{O_1L}$$

il résulte

$$\frac{KO}{KO'} = \frac{O_2M}{O_2L}$$

d'où l'on voit comme plus haut que ce lieu est une circonférence. De la proportion

$$\frac{KO}{O_2M} = \frac{O_1K}{O_1O_2}$$

on déduit que son rayon  $\overline{KO}$  est  $r_2 = b/m$ .

L'enveloppe de toutes ces circonférences est formée par les deux circonférences concentriques de centre  $K$  et de rayons  $r = r_2 - r_1$ ,  $R = r_2 + r_1$ . Tout point de l'anneau fermé par ces deux circonférences est le sommet d'un des triangles considérés.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse construire un triangle  $TPQ \sim \triangle ABC$ , ayant ses sommets sur trois circonférences  $O_1, O_2, O_3$  est que la circonférence  $O_3$  ait au moins un point commun avec l'anneau (figure 3).

On peut construire un tel triangle de la manière suivante: On décrit une circonférence de rayon  $r_1 = a/m$  qui passe par le point  $Q$ ; son centre  $O''$  est sur la circonférence de centre  $K$  et de rayon  $r_2 = b/m$ . On obtient le point  $P$  si l'on construit  $\triangle O_1PO'' \sim \triangle ABC$ . Et l'on trouve le sommet  $T$  en construisant  $\triangle TPQ \sim \triangle ABC$ .

Le nombre de solutions pour le triangle cherché dépend de la position du point  $Q$ . Si le point  $Q$  est dans l'anneau, il existe deux solutions; s'il se trouve sur le bord, seulement une.

2° Si le triangle  $DEF$  est équilatéral (figure 4) et si les distances d'un point quelconque  $V_1$  de son plan aux sommets sont  $\overline{EV_1} = a$ ,  $\overline{DV_1} = b$ ,  $\overline{FV_1} = c$ , avec  $a < b$ , les rayons des circonférences fermant l'anneau qui correspond aux circonférences  $D, E$  et de rayons  $b, a$  sont

$$r = b - a, \quad R = b + a.$$

Le point  $V_1$  se trouve dans l'anneau (ou sur ses bords).

En effet, si l'on supposait le contraire, on pourrait construire un triangle équilatéral qui contiendrait le point  $V_1$ , dont deux sommets seraient sur les circonférences  $D$  et  $E$ , et si petit que tous ses sommets seraient en dehors de l'anneau. Mais cela est impossible, d'après notre proposition. Par conséquent,  $b - a \leq c \leq b + a$  et l'on peut donc construire un triangle avec les segments  $a, b, c$ .  
S. V. PAVLOVIĆ, Belgrade.

### Autre démonstration du théorème de Pompeïu

*Il est toujours possible de construire un triangle dont les côtés ont pour longueurs les distances d'un point  $P$  aux sommets d'un triangle équilatéral  $ABC$ .*

Remarquons tout d'abord que cette propriété ne peut avoir lieu pour un triangle non équilatéral, comme on le voit en prenant  $P$  en un sommet de ce triangle.

Soient dès lors  $a, b, c$  les distances de  $P$  aux sommets  $A, B, C$ , ( $\overline{AB} = 2p$ ). Il suffit de montrer que l'une quelconque de ces grandeurs est supérieure ou égale à la différence des deux autres, par exemple  $c \geq a - b$ . Or  $a - b = 2m$  définit une hyperbole de foyers  $A$  et  $B$  et d'axe  $2m$ ;  $c = 2m$  définit un cercle de centre  $C$  et de rayon  $2m$ . Il suffit de montrer que ces deux courbes ne se coupent pas. Il se trouve même qu'elles sont toujours tangentes. Démontrons-le analytiquement.

$$\text{Equation de l'hyperbole: } (p^2 - m^2)x^2 - m^2y^2 - m^2(p^2 - m^2) = 0.$$

$$\text{Equation du cercle: } x^2 + (y - p\sqrt{3})^2 - 4m^2 = 0.$$

$$\text{Éliminons } x: p^2y^2 - 2p\sqrt{3}(p^2 - m^2)y + 3(p^2 - m^2)^2 = [py - \sqrt{3}(p^2 - m^2)]^2 = 0.$$

Comme les deux valeurs de  $y$  sont réelles et confondues, les deux courbes se touchent, ce qui démontre la proposition.

Remarquons que les relations analytiques ci-dessus valent aussi pour des ellipses. Par conséquent: Soit une conique de foyers  $A$  et  $B$  dont l'axe porté par  $AB$  a la longueur  $2m$ . Construisons la courbe d'équidistance  $2m$ , lieu des points situés à la distance  $2m$  de la conique. Quel que soit  $m$ , cette courbe passe par le point  $C$ , sommet du triangle équilatéral  $ABC$ .

Ou encore: Si  $ABC$  est équilatéral, la longueur d'une des perpendiculaires abaissées de  $C$  sur une conique de foyers  $A$  et  $B$  est égale à la longueur de l'axe porté par  $AB$ .

J.-P. SYDLER, Zurich.

### Zu einer Formel in der Voellmyschen Logarithmentafel <sup>1)</sup>

Die Diskussion der Gleichung

$$A x^2 + 2 B x y + C y^2 + 2 D x + 2 E y + F = 0; \quad (A, C \neq 0) \quad (1)$$

lässt sich im parabolischen Falle

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

wesentlich vereinfachen. Beachtet man (2), dann erhält man durch Elimination von  $C$  aus (1):

$$(A x + B y)^2 + 2 A D x + 2 A E y + A F = 0, \quad (3)$$

und man sieht, dass (3) – und daher auch (1) – dann und nur dann reduzibel ist, wenn ausser (2) auch

$$\begin{vmatrix} A & B \\ D & E \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

gilt. Dieselbe Bedingung gibt auch

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0,$$

da wegen (2)  $\Delta = -(AE - BD)^2 : A$  ist.

Ist daher auch (4) erfüllt, dann erhält man durch Elimination von  $E$  aus (3):

$$(A x + B y)^2 + 2 D (A x + B y) + A F = 0, \quad (5)$$

und die durch (1) dargestellte Kurve zweiter Ordnung reduziert sich wegen (2) und (4) auf zwei reelle, parallele Geraden oder eine doppeltzählende Gerade oder zwei konjugiert komplexe Geraden mit reeller Richtung, je nachdem

$$\begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix} < 0 \quad \text{bzw.} \quad \begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix} > 0$$

ist. Herr WYLER übersieht am angeführten Ort anscheinend, dass wegen (2) und (4) gilt:

$$\begin{vmatrix} C & E \\ E & F \end{vmatrix} = B^2 \begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix} : A^2.$$

R. LAUFFER, Graz.

<sup>1)</sup> Siehe unter dem gleichen Titel: O. WYLER, *El. Math.* 7, 88 (1952).