

# Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **8 (1953)**

Heft 1

PDF erstellt am: **05.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Aufgaben

**Aufgabe 140.** On considère l'ellipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ , rapportée à ses axes de symétrie, et le cercle concentrique  $C$  de rayon  $a + b$ . Montrer que les cercles de CHASLES qui ont leurs centres sur  $C$  et qui sont tangents extérieurement à l'ellipse sont enveloppés par une courbe du sixième degré dont on demande l'équation. (Voir problème n° 50, El. Math. 4, n° 4, 91 [1949]). A. LOEFFLER, Rolle.

*Lösung:* Man kann einen allgemeineren Satz beweisen. Eine Hypotrochoide  $c_h$  und eine Epitrochoide  $c_e$  mögen denselben festen Polkreis  $C$  (Radius  $R$ ), kongruente Rollkreise (Radius  $r$ ) und gleiche Rollgeschwindigkeiten besitzen. Die beschreibenden Punkte  $P_h$  und  $P_e$  sollen in der Anfangslage ( $t = 0$ ) symmetrisch zur gemeinsamen Poltangente beider Rollungen liegen (in der Entfernung  $c$  vom Mittelpunkt ihres Rollkreises). Dann liegen  $P_h$  und  $P_e$  in jedem Zeitpunkt symmetrisch zur zugehörigen gemeinsamen Poltangente, denn die abgerollten Bögen beider Rollkreise sind kongruent. Der Kreis  $k$  mit dem Mittelpunkt in einem gemeinsamen Momentanzentrum, der  $c_h$  im zugehörigen Punkt  $P_h$  berührt, berührt daher auch  $c_e$  im « gleichzeitigen » Punkt  $P_e$ . Die Hüllkurve der Kreise  $k$  besteht daher aus  $c_h$  und  $c_e$ .

Nun sei speziell

$$R = a + b, \quad r = \frac{1}{2} (a + b) \quad \text{und} \quad c = \frac{1}{2} (a - b).$$

Der Mittelpunkt von  $C$  sei Ursprung,  $P_h$  liege für  $t = 0$  auf der  $x$ -Achse. Dann ist  $c_h$  die Ellipse  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ . Die gesuchte Kurve  $c_e$  ist die von  $P_e$  (Anfangslage  $x = a + 2b$ ,  $y = 0$ ) beschriebene Epitrochoide

$$\underline{x = \frac{3}{2} (a + b) \cos t - \frac{1}{2} (a - b) \cos 3t, \quad y = \frac{3}{2} (a + b) \sin t - \frac{1}{2} (a - b) \sin 3t. \quad (1)}$$

Drückt man  $\cos t$  und  $\sin t$  durch  $x^2 + y^2$  aus und setzt dies in die erste oder zweite Gleichung (1) ein, so folgt die Kurvengleichung

$$\underline{4(x^2 + y^2 - a^2 - ab - b^2)^3 - 27(a + b)^2(b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2) = 0.}$$

$c_e$  hat mit den Ellipsenachsen die reellen Punkte  $[\pm(a + 2b), 0]$  und  $[0, \pm(2a + b)]$  gemein und besitzt die (zwischen den Brennpunkten gelegenen) isolierten Punkte

$$\left( \pm \sqrt{\frac{1}{2} (2a^2 - ab - b^2)}, 0 \right)$$

und die konjugiert komplexen Doppelpunkte

$$\left( 0, \pm \sqrt{\frac{1}{2} (2b^2 - ab - a^2)} \right).$$

$c_e$  ist trizirkular, in jedem absoluten Kreispunkt berührt  $c_e$  die Ferngerade und besitzt dort eine Spitze, deren Tangente durch den Ellipsenmittelpunkt geht.

Die Berechnung von  $\dot{x}$  und  $\dot{y}$  zeigt, dass  $c_e$  Doppeltangenten  $x = \pm a \sqrt{2a/(a-b)}$  besitzt; die Berührungspunkte mit

$$\operatorname{tg} t = \pm \sqrt{\frac{a-2b}{a}} \quad \text{und} \quad y = \pm (a+b) \sqrt{\frac{a-2b}{2(a-b)}}$$

sind reell und getrennt für  $a > 2b$ . Sie rücken für  $a = 2b$  zu je einem Flachpunkt  $(\pm 2a, 0)$  zusammen. Ausserdem sind die Geraden  $y = \pm b \sqrt{2b/(b-a)}$  konjugiert

komplexe Doppeltangenten, ihre Berührungspunkte haben reelles

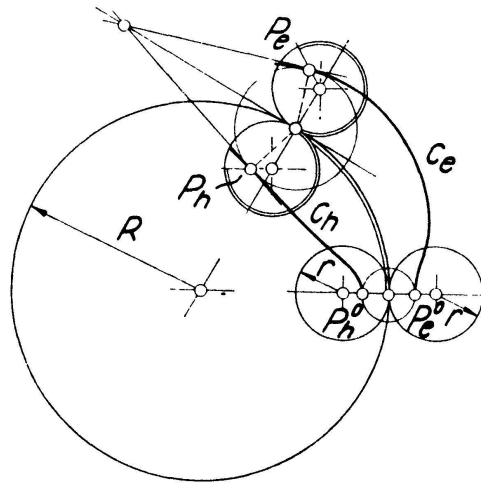
$$x = \pm (a + b) \sqrt{\frac{2a - b}{2(a - b)}}.$$

Durchläuft  $P_h$  die Ellipse  $c_h$ , so durchläuft  $P_e$  die Epitrochoide  $c_e$  mit der dreifachen Geschwindigkeit des Punktes  $P_h$ .

Im Fall  $a > 2b$  besitzt  $c_e$  reelle Wendepunkte mit

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} t &= \pm \sqrt{\frac{b(a - 2b)}{a(2a - b)}}, & x &= \pm \frac{a(a + 4b)}{a + b} \sqrt{\frac{a(2a - b)}{2(a^2 - b^2)}}, \\ \frac{dy}{dx} &= \pm \sqrt{\frac{b}{a} \left(\frac{2a - b}{a - 2b}\right)^3}, & y &= \pm \frac{b(4a + b)}{a + b} \sqrt{\frac{b(a - 2b)}{2(a^2 - b^2)}}. \end{aligned}$$

In den Scheiteln  $[\pm(a + 2b), 0]$  hat  $c_e$  den Krümmungsradius  $3b^2/(2b - a)$ , in den Scheiteln  $[0, \pm(2a + b)]$  den Krümmungsradius  $3a^2/(2a - b)$ .



Im allgemeinen Fall bestehen Zusammenhänge zwischen den Geschwindigkeiten  $v_h$  und  $v_e$ , den Beschleunigungen  $b_h$  und  $b_e$  und den Krümmungsradien  $\varrho_h$  und  $\varrho_e$  gleichzeitiger Punkte von  $c_h$  und  $c_e$ , nämlich

$$\begin{aligned} v_h : v_e &= (R - r) : (R + r), \\ \frac{b_h^2}{(R - r)^3} + \frac{b_e^2}{(R + r)^3} &= 2R \left( \frac{1}{R^2 - r^2} + \frac{c^2}{r^4} \right), \\ \frac{4r^2[(R + r)(R - 2r)\varrho_h + (R - r)(R + 2r)\varrho_e] \varrho_h^2 \varrho_e^2}{= R(r^2 - c^2)[(R + r)\varrho_h + (R - r)\varrho_e]^3}. \end{aligned}$$

F. HOHENBERG, Graz.

Weitere Lösungen sandten F. GOLDNER (London), L. KIEFFER (Luxemburg) und R. LAUFFER (Graz).

**Aufgabe 141.** Trouver la probabilité que dans un jeu français de 40 cartes il y ait au moins une fois une dame et un valet contigus. C. BÖHM, Zurich.

*Lösung:* Ohne Buben und Damen gibt es 32 Karten. In diese Reihe kann man die vier Buben nach folgenden fünf Schemata einsetzen:

- (a) BBBB, (b) BBB\*B, (c) BB\*BB, (d) BB\*B\*B, (e) B\*B\*B\*B,

wo (a) bedeutet, dass alle vier Buben nebeneinander stehen, während sie in (e) vollständig getrennt sind. In (b) stehen drei Buben nebeneinander, und der vierte ist isoliert usw. Man erhält nun sofort folgende verschiedene Anordnungsmöglichkeiten der 36 Karten ohne die Damen:

$$\begin{aligned} \text{für (a)} \quad & 32! \cdot 33 \cdot 4!, & \text{für (b)} \quad & 32! \cdot 33 \cdot 32 \cdot 4!, & \text{für (c)} \quad & 32! \cdot 33 \cdot 32 \cdot 6 \cdot 2, \\ \text{für (d)} \quad & 32! \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 6 \cdot 2, & \text{für (e)} \quad & 32! \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30. \end{aligned}$$

Die vier Damen sollen nun so eingesetzt werden, dass keine Dame neben einem Buben steht. Für jede der Anordnungen in (a) gibt das  $32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35$  Möglichkeiten, denn es sind zuerst 32 Plätze frei, nach dem Einsetzen der ersten Dame 33 Plätze usw. Für die andern Fälle erhält man die Zahlen:

$$\text{(b) und (c)} \quad 31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34, \quad \text{(d)} \quad 30 \cdot 31 \cdot 32 \cdot 33, \quad \text{(e)} \quad 29 \cdot 30 \cdot 31 \cdot 32.$$

Multiplizieren wir die beiden zum selben Buchstaben gehörenden Zahlen und addieren diese fünf Produkte, so erhalten wir die Anzahl  $N$  der Anordnungen der 40 Karten, bei denen keine Dame neben einem Buben steht.  $w = N/40!$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine Dame neben einem Buben steht. Für die in der Aufgabe gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich

$$W = 1 - w = \frac{15\,994\,337}{27\,188\,525} = 0,588 \dots$$

F. GOLDNER, London.

Eine weitere Lösung sandte J. BINZ, Biel.

**Aufgabe 142.** Man beweise für  $(n, k) = 1$  die Kongruenz

$$\binom{n-k-1}{k-1} \equiv 0 \pmod{k}$$

R. LAUFFER, Graz.

*Lösung:* Da in

$$\binom{n-k}{k} = \frac{n-k}{k} \binom{n-k-1}{k-1}$$

die linke Seite ganz ist, muss, wegen  $(n, k) = 1$ ,  $\binom{n-k-1}{k-1}$  durch  $k$  teilbar sein.

B. MARZETTA, Basel.

Ist  $(n, k) = t$ , so ist  $\binom{n-k-1}{k-1}$  durch  $k/t$  teilbar.

Weitere Lösungen sandten A. BAGER, Hjørring (Dänemark), F. GOLDNER, London, und R. KLÖTZLER, Leipzig.

**Aufgabe 143.** On a dans un plan deux groupes de cinq points  $A, B, C, D, E$  et  $A', B', C', D', E'$ . Soit  $\bar{E}$  le point qui correspond à  $E'$  dans la collinéation déterminée par les quatre paires de points  $AA', BB', CC', DD'$ ; on aurait quatre autres points  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ , d'une façon analogue. Démontrer que les cinq droites  $A\bar{A}, B\bar{B}, C\bar{C}, D\bar{D}, E\bar{E}$  se coupent en un point qui est aussi sur les cinq coniques  $ABC\bar{D}\bar{E}, ABC\bar{D}\bar{E}, ABC\bar{D}\bar{E}, ABC\bar{D}\bar{E}, ABC\bar{D}\bar{E}$ .

L. KOLLROS, Zurich.

*Solution:* La conique  $\mathfrak{C}(A'B'C'D'E')$  est transformée par la collinéation  $(AA', BB', CC', DD')$  dans la conique  $\mathfrak{C}_1(ABC\bar{D}\bar{E})$  et par la collinéation  $(AA', BB', CC', EE')$  dans la conique  $\mathfrak{C}_2(ABC\bar{D}\bar{E})$ . Les ponctuelles  $(A'B'C'D'E')$  sur  $\mathfrak{C}$ ,  $(ABC\bar{D}\bar{E})$  sur  $\mathfrak{C}_1$ ,  $(ABC\bar{D}\bar{E})$  sur  $\mathfrak{C}_2$  sont projectives. Soit  $O$  le quatrième point d'intersection de  $\mathfrak{C}_1$  et  $\mathfrak{C}_2$ . Les faisceaux  $O(ABC\bar{D}\bar{E})$  et  $O(ABC\bar{D}\bar{E})$  étant projectifs, les points  $O, D, \bar{D}$  et  $O, E, \bar{E}$  sont alignés. Le point  $O$  étant déterminé par la droite  $E\bar{E}$  et la conique  $\mathfrak{C}_1$ , donc indépendamment de la collinéation  $(AA', BB', CC', EE')$ , on en déduit que non

seulement les coniques  $\mathfrak{C}_1$  et  $\mathfrak{C}_2$  se coupent en  $O$ , mais encore les coniques  $\mathfrak{C}_3, \mathfrak{C}_4, \mathfrak{C}_5$  définies de façon analogue, ce qui démontre le théorème. J.-P. SYDLER, Zurich.

Herr F. HOHENBERG, Graz, sendet uns folgende Bemerkung:

Es genügt, zu zeigen, dass drei der genannten Geraden, etwa  $A\bar{A}$ ,  $B\bar{B}$  und  $C\bar{C}$ , und drei der genannten Kegelschnitte, zum Beispiel  $\bar{A}BCDE$ ,  $A\bar{B}CDE$  und  $ABC\bar{D}E$  durch einen Punkt gehen. Durch eine auf  $A'B'C'D'E'$  ausgeübte Kollineation lässt sich erreichen, dass  $E'$  mit  $E$  und  $F'$  mit  $F$  identisch wird. Verlegt man dann  $E$  und  $F$  durch eine weitere Kollineation in die absoluten Kreispunkte, so sind alle in der Aufgabe genannten Kollineationen gleichsinnige Ähnlichkeiten, und es ist nun zu beweisen:

*Errichtet man über den Seiten eines Dreiecks drei untereinander gleichsinnig ähnliche Dreiecke  $\bar{A}BC$ ,  $A\bar{B}C$  und  $ABC\bar{C}$ , so schneiden sich die Geraden  $A\bar{A}$ ,  $B\bar{B}$  und  $C\bar{C}$  in einem Punkt, durch den auch die Umkreise der Dreiecke  $\bar{A}BC$ ,  $A\bar{B}C$  und  $ABC\bar{C}$  gehen.*

Das ist aber eine von NEUBERG gefundene und von ihm nach TORRICELLI benannte Figur (siehe zum Beispiel *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. III AB 10 [Teubner, Leipzig 1914], S. 1216). Die Aufgabe spricht die projektive Fassung des Neubergschen Satzes aus. Auch der elementare Neubergsche Beweis lässt sich projektiv formulieren.

Eine weitere Lösung sandte R. LAUFFER, Graz.

### Neue Aufgaben

172. Eine beliebige multiplikative Gruppe  $\mathfrak{G}$  werde (wie bei einem Körper, aber allgemeiner) durch ein einziges neues Element  $O$  erweitert. Auf wie viele Weisen kann man die Multiplikation von  $O$  mit sich und den Elementen von  $\mathfrak{G}$  definieren, so dass das assoziative Gesetz bestehen bleibt? Wann ist das erweiterte System wieder eine Gruppe? A. SPEISER, Basel, und A. BAGER, Hjørring (Dänemark).
173. Von EULER stammt das Problem der Bestimmung von Funktionen, die sich selber als Periode haben, das heisst der Funktionalgleichung

$$f[x + f(x)] = f(x)$$

genügen. Man gebe die allgemeine Lösung an.

A. SPEISER, Basel.

174. Man zeige: Ein von sechs berührend aneinanderschliessenden, 60gradigen Kreisbögen berandetes Mittelpunkts oval hat die Eigenschaft, in einem festen gleichseitigen Dreieck zwangläufig umwendbar zu sein, das heisst eine kontinuierliche und geschlossene Bewegung zu gestatten, während welcher es ständig alle drei Seiten berührt. W. WUNDERLICH, Wien.
175. Man beweise: Liegen die Punkte  $A, B, C$  und  $D$  auf einem Kreis und ist  $O$  ein beliebiger Punkt der Kreisebene, dann ist

$$\overline{OA}^2 \cdot Fl(BCD) - \overline{OB}^2 \cdot Fl(ACD) + \overline{OC}^2 \cdot Fl(ABD) - \overline{OD}^2 \cdot Fl(ABC) = 0.$$

R. LAUFFER, Graz.

176. Man beweise:  $\binom{n^k - 1}{n}$  ist zu  $n$  teilerfremd, wenn  $k$  so gross ist, dass die  $k$ -te Potenz des kleinsten Primfaktors von  $n$  grösser ist als  $n$  ( $n$  und  $k$  natürliche Zahlen). A. STOLL, Zürich.

## Bericht

### Fortbildungskurs des Vereins Schweizerischer Gymnasiallehrer in Luzern

5. bis 11. Oktober 1952

Für den Physiker war es erfreulich, gleich an der Spitze des Vortragsprogramms ein physikalisches Thema zu finden: In der ersten allgemeinen Sitzung sprach Prof. Dr. G. LEMAITRE (Löwen und Brüssel) über *L'univers tel que le conçoit la physique*