

Topologische Gesichtspunkte in der Nomographie

Autor(en): **Jeger, M.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **8 (1953)**

Heft 2

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-16914>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer*

El. Math.

Band VIII

Nr. 2

Seiten 25–48

Basel, 15. März 1953

Topologische Gesichtspunkte in der Nomographie

Eine Einführung in die Geometrie der Gewebe

In der Topologie, wie ihr RIEMANN und POINCARÉ die Richtung gewiesen haben, pflegt man Eigenschaften von geometrischen Figuren in ihrer Gesamterstreckung zu untersuchen. Diese Betrachtungsweise führt auf *topologische Invarianten* etwa von der Art des Geschlechtes einer zweiseitigen geschlossenen Fläche. Daneben bestehen aber auch geometrische Figuren, welche bereits topologische Invarianten im Kleinen besitzen. Diese Figuren werden als *Gewebe* bezeichnet; ihr Studium ist der Inhalt der *Geometrie der Gewebe*.

Die Lehre von den ebenen 3-Geweben hat verschiedene Berührungspunkte mit der Nomographie funktioneller Zusammenhänge zwischen drei Variablen. Die nachfolgenden Ausführungen möchten diesen Sachverhalt etwas näher beleuchten. Ihr Ziel ist jedoch in erster Linie die Vermittlung einer Einführung in die Geometrie der Gewebe auf dem Wege über die Nomographie. Gleichzeitig werden durch die Auseinandersetzung einiger gewebegeometrischer Problemstellungen der Nomographie die geometrischen Hintergründe dieses Zweiges der angewandten Mathematik etwas stärker betont, als dies in den meisten Büchern über Nomographie der Fall ist.

Eine Netztafel für die Funktion $F(x, y, z) = x y - z = 0$. Gewebe

In einem (x, y) -Koordinatensystem werden die Kurven

$x = \text{const}$ (Parallelen zur y -Achse),

$y = \text{const}$ (Parallelen zur x -Achse) und

$z = \text{const}$ (hier also $x y = \text{const}$, das heisst gleichseitige Hyperbeln)

aufgezeichnet, wobei wir uns auf den ersten Quadranten beschränken wollen. Die so entstehende geometrische Figur wird in der Nomographie als *Netztafel* bezeichnet. Ihre Handhabung ist gegeben durch die Eigenschaft, dass die drei Kurven zu zusammengehörenden Variablenwerten x_0 , y_0 und z_0 sich in einem Punkte P , dem sogenannten *Ablesepunkt*, schneiden. In der Figur 1 ist die graphische Auswertung der Multiplikation $2 \cdot 4 = 8$ hervorgehoben.

Es ergibt sich ohne weiteres, dass die Handhabung einer Netztafel durch eine Deformation der Unterlage (zum Beispiel Papierverzug bei Feuchtigkeit) nicht gestört

wird. Um diesen Sachverhalt etwas deutlicher hervortreten zu lassen, denken wir uns die Netztafel der Figur 1 auf eine dehnbare Unterlage, etwa auf eine Gummihaut gezeichnet. Insbesondere betrachten wir ein Gebiet \mathfrak{G} , das ganz im ersten Quadranten enthalten ist, zum Beispiel das Rechteckgebiet $ABCD$. Die Unterlage unterwerfen wir jetzt einer beliebigen Deformation. Um ein konkretes Beispiel vor Augen zu haben, wollen wir das Rechteckgebiet \mathfrak{G} durch Zug an den vier Ecken A, B, C und D kissenartig deformieren in das Gebiet $\bar{\mathfrak{G}}$ (Figur 2). Falls die Deformation von \mathfrak{G} in $\bar{\mathfrak{G}}$ zu keinen mehrfachen Bedeckungen von Teilen des Gebietes $\bar{\mathfrak{G}}$ und zudem zu keinen Rissen der Gummihaut führt, so ändert sich an der Handhabung unserer Netztafel nichts. Zeichnen wir \mathfrak{G} in einer Ebene α und $\bar{\mathfrak{G}}$ in einer Ebene $\bar{\alpha}$, so bedeutet

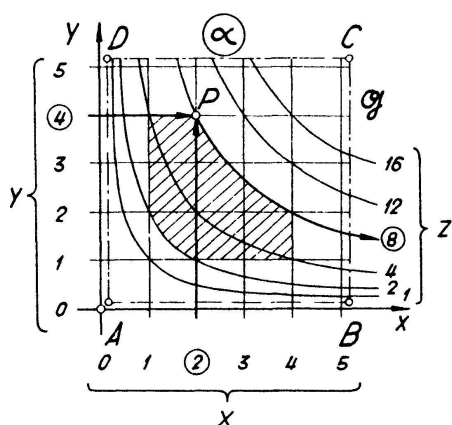


Fig. 1

Ablesebeispiel: $x_0 = 2, y_0 = 4, z_0 = 8$.

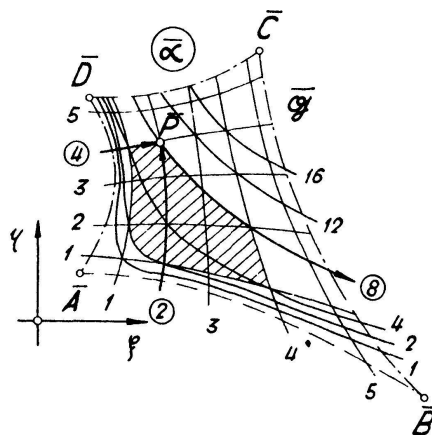


Fig. 2

die eben ausgesprochene Forderung, dass die Abbildung der Ebene α auf die Ebene $\bar{\alpha}$ eineindeutig und in beiden Richtungen stetig ist. Man spricht dann von einer *topologischen Abbildung* oder von einer *topologischen Deformation*. Figur 2 ist durch topologische Deformation der Figur 1 entstanden.

Die Veränderung eines Nomogramms durch eine geometrische Abbildung wird in der Nomographie ganz allgemein als *Anamorphose* bezeichnet.

Unsere Netztafel ist eine geometrische Figur, bestehend aus drei Scharen von *numerierten*¹⁾ Kurven. Sehen wir jetzt von dieser Numerierung ab, so bleiben drei Kurvenscharen übrig; dieses Gebilde wird als *Gewebe* (genauer: 3-Gewebe) bezeichnet.

In der neuen Terminologie formuliert, ist eine Netztafel ein 3-Gewebe, dessen Kurvenscharen je eine stetige Numerierung tragen. Die Feststellung der 3-Gewebe als Träger von Netztafeln vermittelt uns den Zusammenhang zwischen Gewebegeometrie und Nomographie; insbesondere können wir darin die Bedeutung der Gewebegeometrie für die Fragen der Anamorphose von Netztafeln erkennen.

Zunächst wollen wir die Begriffe *Kurvenschar* und *Gewebe* noch etwas präziser fassen.

Ein Kurvensystem in einem einfach-zusammenhängenden Gebiet \mathfrak{G} soll eine Kurvenschar heissen, wenn Gebiet und Kurven durch topologische Deformation eines Büschels von parallelen Geraden innerhalb eines in bezug auf die Geraden konvexen Gebietes \mathfrak{G}_0 erzeugt werden können.

¹⁾ *Numeriert* will hier und im folgenden stets heissen: auf einen bestimmten Parameter bezogen.

Die Figur 3 veranschaulicht diesen Sachverhalt. Denkt man sich das Gebiet \mathfrak{G}_0 auf eine dehnbare Unterlage gezeichnet und spannt diese hernach in beliebiger Weise aus, so erhält man Beispiele von Kurvenscharen. Demgegenüber führen die topologischen Deformationen der Figur 4 auf keine Kurvenscharen, weil hier das Gebiet \mathfrak{G}_0 in bezug auf die parallelen Geraden nicht konvex ist. Es gibt Geraden, welche durch das Gebiet «zerschnitten» werden.

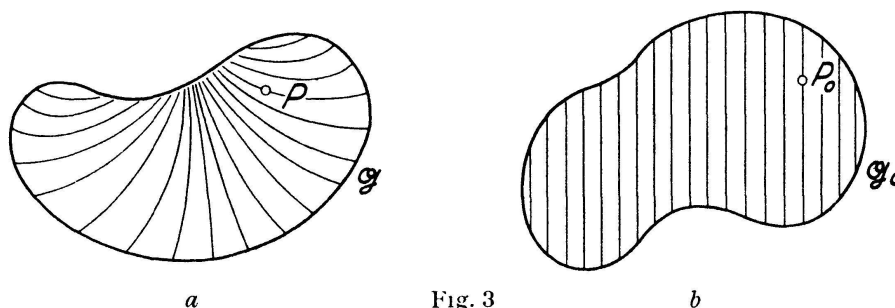


Fig. 3

Der Definition der Kurvenschar entnimmt man ohne weiteres, dass durch jeden Punkt P in \mathfrak{G} genau eine Kurve der Schar hindurchgeht, denn Entsprechendes gilt trivialerweise im Originalgebiet \mathfrak{G}_0 .

Zwei Kurvenscharen in einem Gebiet \mathfrak{G} werden als Netz bezeichnet, wenn in jedem Punkte P von \mathfrak{G} die beiden Kurventangenten voneinander verschieden sind.

Die Figur 5 zeigt ein Beispiel für ein Kurvennetz. Es sei noch bemerkt, dass ein Kurvennetz stets topologisch in ein orthogonales Parallelennetz (kartesisches Koordinatennetz) verzerrt werden kann.

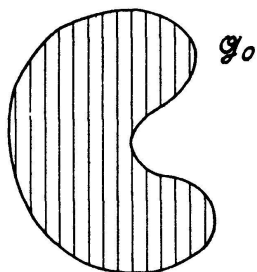


Fig. 4

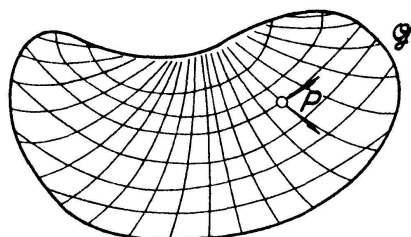


Fig. 5

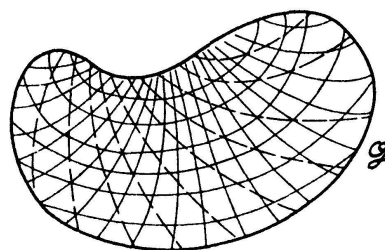


Fig. 6

Nach diesen vorbereitenden Erklärungen können wir jetzt die genaue Definition eines Gewebes geben:

Drei Kurvenscharen in einem Gebiete \mathfrak{G} heissen ein 3-Gewebe, wenn sie paarweise Netze aufspannen.

Ein 3-Gewebe mit drei krummen Kurvenscharen ist in Figur 6 wiedergegeben.

Die Geometrie der Gewebe befasst sich mit topologischen Deformationen von Geweben, insbesondere aber mit dem Aufsuchen von Grössen, welche sich bei derartigen Abbildungen nicht ändern. Grössen dieser Art werden als *Gewebeinvarianten* bezeichnet. Eine Gewebeinvariante ist somit charakteristisch für ein bestimmtes Gewebe, unabhängig von seiner speziellen Gestalt. Die Bedeutung derartiger Untersuchungen für die Nomographie haben wir bereits hervorgehoben. Wir wollen nun im folgenden ein gewebegeometrisches Problem an unserer Netztafel für die Funktion

$x y - z = 0$ etwas eingehender diskutieren. Gleichzeitig werden wir dabei eine wichtige Gewebeklasse und damit eine vom Standpunkt der Nomographie aus bedeutende Funktionsklasse näher kennenlernen.

Sechseckgewebe und Sechseckfunktionen

Wir greifen nun nochmals zurück auf die Netztafel für die Funktion $F(x, y, z) = x y - z = 0$ in Figur 1. Es sei zunächst erwähnt, dass die drei Kurvenscharen dieser Netztafel im Rechteckgebiet \mathfrak{G} ein Gewebe im Sinne unserer Definition darstellen. Durch die topologische Deformation ist aus dieser Figur die Figur 2 entstanden. Wir wollen nun versuchen, auf die Frage eine Antwort zu geben, ob sich eventuell

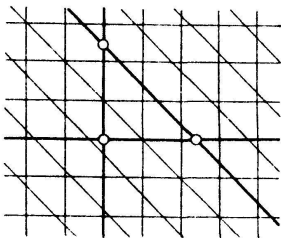
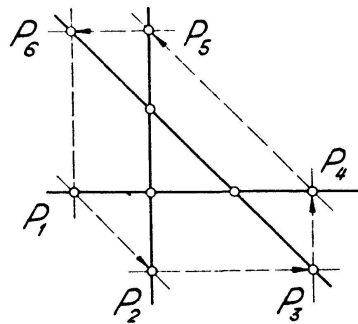


Fig. 7



Konfiguration S

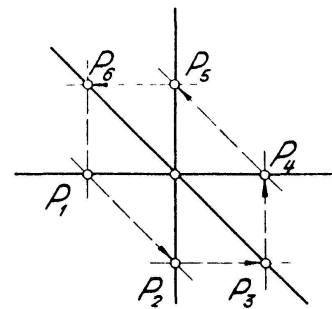


Fig. 8

Konfiguration S'

die Deformation der Figur 1 so ausführen lässt, dass das Trägergewebe unserer Netztafel zu einem Parallelengewebe (Gewebe aus drei Parallelenbüscheln) wird. Diese Problemstellung entspricht einem praktischen Bedürfnis; falls die Netztafel für $F(x, y, z) = 0$ eine derart einfache geradlinige Darstellung zulässt, so wird sich der Hersteller des Nomogramms kaum für eine andere Form entscheiden.

Für den Fall der topologischen Äquivalenz unseres Trägergewebes mit einem Parallelengewebe lässt sich sofort eine notwendige Bedingung angeben. Ist nämlich das Trägergewebe parallelisierbar, so lässt sich dieses stets auf die Gestalt der Figur 7 abbilden (zwei Felder orthogonal, das dritte um 45° gegenüber den andern beiden geneigt). Zur Erhärtung dieses Sachverhaltes genügt die Bemerkung, dass drei beliebige Parallelenfelder durch eine Affinität immer in diese Lage gebracht werden können.

Wir greifen nun in der Figur 7 drei beliebige Kurven (Geraden), welche verschiedenen Scharen angehören, heraus (Figur 8). Auf einer der drei Geraden wählen wir einen Punkt P_1 und zeichnen eine zweite durch ihn laufende Gewebegerade. Diese trifft genau eine der beiden verbleibenden Ausgangsgeraden in einem endlichen Punkte P_2 . In P_2 kennen wir jetzt zwei Gewebegeraden; die noch durch P_2 laufende dritte Gewebegerade führt auf einen Punkt P_3 . Setzen wir diese Konstruktion in der gleichen Weise fort, so gelangen wir der Reihe nach zu den weiteren Punkten P_4 , P_5 , P_6 , und da die Gewebegeraden drei Parallelenfeldern angehören, folgt sofort, dass das entstehende Sechseck sich schliesst: die Punkte P_6 und P_1 liegen auf einer Gewebegeraden.

Wir bezeichnen im folgenden dieses Sechseck von Figur 8a als Konfiguration S. In der Figur 8b ist dieses Sechseck auch noch aufgezeichnet für den Fall, dass die drei Ausgangsgeraden des Gewebes inzident sind. Dieses spezielle Sechseck nennen wir die Konfiguration S'.

Im Parallelengewebe besteht die Konfiguration S uneingeschränkt, das will heissen an jeder Stelle und in jeder Grösse. Die Konfiguration S ist aber eine topologische Invariante, und wir finden daher als notwendige Bedingung für Abbildbarkeit eines 3-Gewebes auf ein Parallelengewebe die Existenz der Konfiguration S an jeder Stelle und in jeder Grösse. Gewebe mit dieser Eigenschaft bezeichnet man als *Sechseckgewebe*.

Zunächst wollen wir jetzt zeigen, dass das Trägergewebe der Netztafel für $xy - z = 0$ der Figur 1 ein Sechseckgewebe ist. Zur Verifikation der Sechseckigkeit wählen

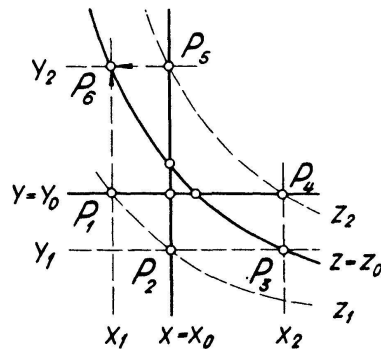


Fig. 9

wir drei beliebige Gewebekurven aus, etwa die Geraden $x = x_0$, $y = y_0$ und die Hyperbel $xy = z_0$ (Figur 9). Durch den auf der Geraden $y = y_0$ frei wählbaren Punkt P_1 legen wir die beiden andern Gewebekurven und führen diese Konstruktion im Gegenuhrzeigersinn weiter. Es soll hernach gezeigt werden, dass die Gerade $x = x_1$ durch P_1 und die Gerade $y = y_2$ durch P_5 sich in einem Punkt P_6 auf der Hyperbel $z = z_0$ schneiden.

Da in P_1 die Kurven $x = x_1$, $y = y_0$ und $z = z_1$ zusammentreffen, gilt entsprechend unserer Funktion $F(x, y, z) = xy - z = 0$ die Beziehung $x_1 y_0 = z_1$. In analoger Weise fortfahrend, erhalten wir schliesslich für die Eckpunkte P_1 bis P_5 des Sechsecks:

$$\left. \begin{array}{ll} P_1: x_1 y_0 = z_1, & P_3: x_2 y_1 = z_0, \\ P_2: x_0 y_1 = z_1, & P_4: x_2 y_0 = z_2, \\ P_5: x_0 y_2 = z_2. \end{array} \right\} \quad (1)$$

Unter Berücksichtigung dieser Beziehungen erhalten wir nun für den Schnittpunkt P_6 der Geraden $x = x_1$ und $y = y_2$:

$$P_6: x_1 y_2 = \frac{z_1}{y_0} \cdot \frac{z_2}{x_0} = \frac{z_1}{x_0} \cdot \frac{z_2}{y_0} = y_1 x_2 = z_0, \quad (2)$$

das heisst, P_6 liegt auf der Hyperbel $z = z_0$. Das Grundgewebe ist somit ein Sechseckgewebe. Es sei hier noch bemerkt, dass zur Gewinnung der Aussage (2) sämtliche fünf Beziehungen (1) benutzt werden mussten.

Ein Satz von BLASCHKE und THOMSEN besagt nun, dass *die Sechseckeigenschaft für die Abbildbarkeit auf ein Parallelengewebe nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend* ist. Dieser Satz wurde als erstes wichtiges Ergebnis der Gewebegeometrie gefunden.

Für unsere Netztafel der Figur 1 lässt sich die Abbildung auf ein Parallelengewebe sofort angeben. Gehen wir nämlich von der (x, y) -Ebene α mittels der Abbildung

$$\xi = \log x, \quad \eta = \log y \quad (3)$$

in die (ξ, η) -Ebene $\bar{\alpha}$ über, so bleibt das Koordinatennetz invariant, und die gleichseitigen Hyperbeln

$$x y = \text{const} \quad \text{bzw.} \quad \log x + \log y = \text{const}$$

gehen über in das Parallelenbündel

$$\xi + \eta = \text{const}$$

der Ebene $\bar{\alpha}$.

Die Figur 10 zeigt das so deformierte Nomogramm. Das Rechteckgebiet \mathfrak{G} wird dabei in ein anderes Rechteckgebiet $\bar{\mathfrak{G}}$ verzerrt.

Bei der Verifikation der Sechseckfigur in unserer Netztafel kam uns sehr zustatten, dass $F(x, y, z) = 0$ sich in ein Produkt oder, was damit äquivalent ist, in eine Summe von Funktionen jeder einzelnen Variablen aufspalten liess (der Übergang vom Produkt zur Summe ergibt sich durch Logarithmieren):

$$F(x, y, z) = x y - z = 0 \quad \text{oder} \quad \log x + \log y - \log z = 0.$$

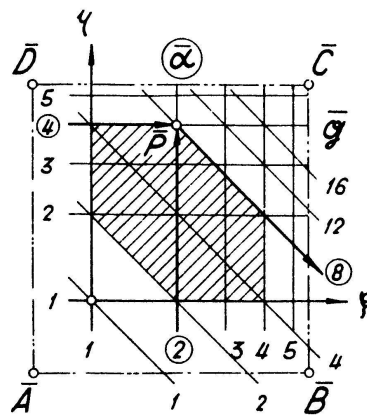


Fig. 10

Es ist evident, dass die Verifikation der Sechseckfigur nach demselben Schema für jede Funktion $F(x, y, z) = 0$ gelingt, welche auf die Gestalt

$$f_1(x) + f_2(y) + f_3(z) = 0 \quad (4)$$

transformiert werden kann.

Es sei hier ohne Beweis erwähnt, dass diese Eigenschaft für diejenigen Funktionen charakteristisch ist, deren Netztafel ein Sechseckgewebe zum Träger hat. *Die Existenz der Sechseckfigur in der Netztafel einer Funktion $F(x, y, z) = 0$ ist damit äqui-*

valent, dass $F(x, y, z) = 0$ in die Gestalt (4) übergeführt werden kann, das heisst, es gibt drei Funktionen $f_1(x)$, $f_2(y)$ und $f_3(z)$ mit der Eigenschaft, dass ihre Summe in jedem Punkte eines Gebietes \mathfrak{G} verschwindet. Da sämtliche Netztafeln für ein und dieselbe Funktion topologisch äquivalent sind, werden wir im folgenden eine Funktion mit einer Sechsecknetztafel als *Sechseckfunktion* bezeichnen.

Der Beweis des Satzes von BLASCHKE und THOMSEN beruht im wesentlichen auf der Konstruktion von drei Funktionen $f_1(x)$, $f_2(y)$, $f_3(z)$ mit in jedem Punkte verschwindender Summe; dies ist gleichbedeutend mit einer Umnummerierung der Kurven jeder Schar. Lässt sich nämlich $F(x, y, z) = 0$ auf die Gestalt (4) transformieren, so liefert die Abbildung

$$\xi = f_1(x); \quad \eta = f_2(y)$$

die Überführung des Trägernetzes in ein Parallelnetz.

Die Konfiguration S (oder S') ist die geometrische Kennzeichnung der Sechseckfunktionen. Für die praktischen Anwendungen ist jedoch eine analytische Form der Parallelisierbarkeitsbedingung kräftiger. Um diese zu finden, haben wir analytisch die Bedingung dafür zu formulieren, dass eine vorgelegte Funktion $F(x, y, z) = 0$ auf die Gestalt (4) gebracht werden kann. Dies führt auf die sogenannte Differentialgleichung von DE SAINT-ROBERT; die Sechseckfunktionen $F(x, y, z) = 0$ sind gekennzeichnet durch

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log \left(\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y} \right) = 0 \quad 1). \quad (5)$$

(Fortsetzung im nächsten Heft)

M. JEGER, Olten und Zürich

Die Anwendung der Riemannschen Zahlenkugel zur Herleitung der sphärisch-trigonometrischen Hauptsätze

Es ist eine wohlbekannte Tatsache, dass in den meisten Darstellungen der sphärischen Trigonometrie den sogenannten Eulerschen Dreiecken eine Vorzugsstellung eingeräumt wird, indem die Beweise der grundlegenden Sätze unter der ausdrücklichen oder stillschweigenden Annahme geführt werden, es seien sämtliche Seiten und Winkel des Dreiecks kleiner als zwei Rechte. Die Verifikation der Formeln für andere als Eulersche Dreiecke führt dann zu einer mühsamen Fallunterscheidung, die die Darstellung unnötigerweise belastet, falls sie nicht kurzerhand dem Leser aufgebürdet wird. Man kann zwar die Anzahl der zu betrachtenden Fälle etwas vermindern, indem man den Beweis auf die Formeln für die Drehung eines rechtwinkligen Koordinatensystems stützt oder von den Richtungskosinus von drei Richtungen ausgeht, muss aber dann eine Einbusse an Anschaulichkeit dafür in Kauf nehmen.

1) Für die an und für sich elementare Herleitung von (5) siehe bei P. DE SAINT-ROBERT, *De la résolution de certaines équations à trois variables*, Mem. reale Accad. Torino 25, 53 (1871), oder H. SCHWERDT, *Lehrbuch der Nomographie* (Springer, Berlin 1924), S. 136.