

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Band: 8 (1953)
Heft: 3

Artikel: Trigonometrische Mittelwerte
Autor: Jecklin, H.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-16917>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 19.11.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Trigonometrische Mittelwerte

I.

Die trigonometrischen Mittelwerte einfacher Art bilden eine Gruppe der einfachen quasiaarithmetischen Mittel. Unter einem einfachen quasiaarithmetischen Mittel M von n reellen Grössen $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ versteht man eine Mittelbildung von der Art

$$M = \varphi \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \right), \quad (1)$$

wobei φ die Umkehrfunktion von $f(x)$ bedeutet, und $f(x)$ selbst im Intervall $x_1 \leq x_i \leq x_n$ eine reelle, eindeutige, stetige, endliche und streng monotone Funktion ist. Steigende Monotonie im strengen Sinne liegt in einem Intervall vor, wenn dort für $x_i < x_k$ stets auch $f(x_i) < f(x_k)$. Ist umgekehrt für $x_i < x_k$ stets $f(x_i) > f(x_k)$, so ist die Funktion monoton fallend in strengem Sinne.

Setzen wir für $f(x)$ in (1) eine trigonometrische Funktion ein, so erhalten wir ein einfaches trigonometrisches Mittel. Sei zum Beispiel $f(x) = \sin x$, so ergibt sich das Sinusmittel

$$S = \arcsin \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin x_i \right).$$

Wegen der für die Mittelbildung gemäss (1) erforderlichen Funktionseigenschaften muss man sich in Anbetracht der periodischen Natur der trigonometrischen Funktionen auf bestimmte Intervalle beschränken.

II.

Bevor wir uns näher mit den trigonometrischen Mitteln beschäftigen, nennen wir einige Hilfssätze, deren wir in der Folge bedürfen.

a) Die quasiaarithmetische Mittelbildung ist invariant gegenüber linearer Transformation von $f(x)$. Das heisst, wenn in (1) die Funktion $f(x)$ ersetzt wird durch $a f(x) + b$, wobei a und b konstant, so ändert sich der Wert des Mittels M nicht.

b) Für das Studium der quasiaarithmetischen Mittel ist der Begriff der Konvexität einer Funktion sehr wichtig. Eine Funktion $f(x)$ ist in einem Intervall konvex im strengen Sinne, wenn dort für $x_i \neq x_k$ die Ungleichung gilt

$$f\left(\frac{x_i + x_k}{2}\right) < \frac{1}{2} [f(x_i) + f(x_k)].$$

Gilt die Ungleichung in umgekehrtem Sinne, so ist $f(x)$ konkav. Da $f(x)$ für die Mittelbildung gemäss (1) auch monoton sein muss, haben wir zu unterscheiden zwischen konvex steigenden, konkav steigenden, konvex fallenden und konkav fallenden Funktionen.

c) Ist $f(x)$ konvex steigend oder konkav fallend, so ergibt die Mittelbildung nach (1) einen grösseren Wert als das arithmetische Mittel

$$A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (2)$$

Ist dagegen $f(x)$ konkav steigend oder konvex fallend, so ist das bezügliche quasiarithmetische Mittel kleiner als das arithmetische Mittel der x_i . Man vergleiche hiezu die Ausführungen des Verfassers in Bd. 4, Heft 5, dieser Zeitschrift. Wegen der unter a) vorhin genannten linearen Transformationsmöglichkeit kann man sich auf die Betrachtung konvex oder konkav steigender Funktionen beschränken. Sei zum Beispiel $f(x) = 1/x$ (Mittelbildung nach gleichseitiger Hyperbel), also eine für $0 < x < \infty$ konvex fallende Funktion, so ist im gleichen Intervall $f(x) = a - b/x$ konkav steigend, und somit

$$H = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right)^{-1} < A, \quad (3)$$

was besagt, dass das harmonische Mittel positiver Grössen stets kleiner ist als das arithmetische Mittel.

d) Aus dem soeben Gesagten folgt, dass wenn $f(x)$ konvex steigend, $h(x)$ aber konkav steigend ist, die Mittelbildung gemäss (1) mit $f(x)$ einen grösseren Wert liefert als mit $h(x)$. Sind aber zwischen x_1 und x_n beide Funktionen konvex steigend oder beide konkav steigend, so ergibt sich eine Vergleichsmöglichkeit durch geeignete Substitution von x , welche die eine der beiden Funktionen linear werden lässt. Dies kann einfach erreicht werden durch den Ansatz $f(x) = z$, $x = \varphi(z)$, wobei φ Umkehrfunktion von f , oder durch den Ansatz $h(x) = z$, $x = \psi(z)$, wobei ψ Umkehrfunktion von h . Die Grenzen des Intervalls x_1 und x_n ändern sich dabei in $f(x_1)$ und $f(x_n)$ bzw. in $h(x_1)$ und $h(x_n)$. Sei zum Beispiel $f(x) = \ln x$ (was zum geometrischen Mittel führt), $h(x) = -1/x$ (was zum harmonischen Mittel führt), also zwei im Intervall $0 < x < \infty$ konkav steigende Funktionen. Setzt man $x = \varphi(z) = e^z$, so erhalten wir die beiden Funktionen

$$f[\varphi(z)] = F(z) = z \quad \text{und} \quad h[\psi(z)] = H(z) = -e^{-z},$$

von welchen die letztere konkav steigend ist im Intervall $-\infty < z < \infty$. Daraus folgt schon unmittelbar, dass das harmonische Mittel H kleiner sein muss als das geometrische Mittel G . Detailliert kann man dies wie folgt zeigen: Der Mittelwert M nach der Funktion $H(z) = -e^{-z}$ ergibt sich aus der Gleichsetzung

$$n(-e^{-M}) = -\sum_{i=1}^n e^{-z_i},$$

also

$$M = -\ln \left(\frac{1}{n} \sum e^{-z} \right),$$

und es ist sicher $M < 1/n \sum z$ im Intervall $-\infty < z < \infty$.

Nun ist aber $z = \ln x$, daher

$$-\ln\left(\frac{1}{n} \sum \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{n} \sum \ln x \quad \text{für } 0 < x < \infty$$

oder

$$H = \left(\frac{1}{n} \sum \frac{1}{x}\right)^{-1} < e^{1/n \sum \ln x} = \sqrt[n]{\prod x} = G,$$

was zu zeigen war.

III.

Wenn wir uns nun speziell der Betrachtung der trigonometrischen Mittelwerte zuwenden, so wollen wir uns dabei auf das Intervall 0 bis $\pi/2$ beschränken, was ausdrücklich betont sei. In diesem Intervall ist $f(x) = \sin x$ konkav steigend und $f(x) = \cos x$ konkav fallend, somit $f(x) = -\cos x$ konvex steigend. Aus dieser Feststellung folgt unmittelbar, dass für $0 \leq x \leq \pi/2$ das Sinusmittel

$$S = \arcsin\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin x_i\right) \quad (4)$$

kleiner ist als das arithmetische Mittel A , und dieses hinwiederum kleiner als das Kosinusmittel

$$C = \arccos\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos x_i\right). \quad (5)$$

PRATELLI¹⁾, der sich in anderer Betrachtungsweise mit diesen beiden Mittelwerten befasst hat, behauptet und glaubt bewiesen zu haben, dass für $0 \leq x \leq \pi/2$ das geometrische Mittel G stets kleiner sei als das Sinusmittel S . Diese Behauptung ist unrichtig. Denn setzen wir $f(x) = \sin x$, $h(x) = \ln x$, beide konkav steigend, und substituieren $x = \psi(z) = e^z$, so erhalten wir die beiden Funktionen $F(z) = \sin e^z$ und $H(z) = z$, zu betrachten im Intervall $-\infty < z \leq \ln \pi/2$. In diesem Intervall hat $F(z)$ einen Wendepunkt. Dessen Abszisse erhalten wir bei Nullsetzung der zweiten Ableitung als Wurzel der Gleichung $\text{ctg } e^z = e^z$. Vor dem Wendepunkt ist $F(z)$ konvex steigend, nachher konkav steigend. Das Sinusmittel S und das geometrische Mittel G lassen sich also in bezug auf das ganze Intervall $0 < x \leq \pi/2$ nicht in eine Grössenordnung eingliedern; je nach der Verteilung der zu mittelnden x_i kann der eine oder der andere Mittelwert grösser ausfallen. Dagegen lässt sich bestimmt aussagen bezüglich der beiden Teilintervalle $0 < x \leq x_{GS}$ und $x_{GS} \leq x \leq \pi/2$, wobei x_{GS} der Wendepunktsabszisse von $F(z)$ entspricht, also die Wurzel von $\text{ctg } x = x$ ist. Wir finden $x_{GS} = 49^\circ 17' 36,5''$, oder als Bogenlänge des Einheitskreises $x_{GS} = 0,8603334$, und es muss gelten $G < S$ für $0 < x \leq x_{GS}$, $S < G$ für $x_{GS} \leq x \leq \pi/2$. Der Beweis für das erstgenannte Teilintervall ergibt sich wie folgt: Da $F(z)$ für $-\infty < z \leq \ln x_{GS}$ konvex steigend ist, muss das mit dieser Funktion gebildete Mittel grösser sein als

¹⁾ A. PRATELLI, *Sulle medie trigonometriche*, Atti I.^a Riunione sci. Soc. ital. Statistica (Pisa, 9. Oktober 1939).

das arithmetische Mittel A der z_i . M erhält man aus der Gleichsetzung

$$n \sin e^M = \sum \sin e^z$$

also

$$M = \ln \left[\arcsin \left(\frac{1}{n} \sum \sin e^z \right) \right] > \frac{1}{n} \sum z$$

oder

$$\arcsin \left(\frac{1}{n} \sum \sin e^z \right) > e^{1/n \sum z}, \quad \text{in } 0 < z \leq \ln x_{GS}.$$

Nun ist aber $z = \ln x$, daher

$$S = \arcsin \left(\frac{1}{n} \sum \sin x \right) > e^{1/n \sum \ln x} = \sqrt[n]{\prod x} = G, \quad \text{in } 0 < x \leq x_{GS}.$$

Für das zweite Teilintervall läuft der Beweis ganz analog, nur mit umgekehrtem Ungleichungszeichen, da $F(z)$ hier konkav steigend ist.

Da das harmonische Mittel H kleiner ist als das geometrische Mittel G , müsste als Folgerung aus der Behauptung PRATELLIS für $0 < x \leq \pi/2$ stets gelten $H < S$. Es ist aber leicht zu zeigen, dass auch hier, je nach Verteilung der zu mittelnden x_i , der eine oder andere Wert grösser sein kann. Wir setzen $f(x) = \sin x$, $h(x) = -1/x$, beide konkav steigend, und substituieren $x = \psi(z) = -1/z$. Dann tritt an Stelle der ersten Funktion

$$F(z) = -\sin \frac{1}{z},$$

zu betrachten im Intervall $2/\pi \leq z < \infty$, in welchem $F(z)$ einen Wendepunkt aufweist. Und zwar ist $F(z)$ vor dem Wendepunkt konvex steigend, nachher konkav steigend. Nach Nullsetzen der zweiten Ableitung erhält man die Abszisse des Wendepunktes als Wurzel der Gleichung $\operatorname{tg} 1/z = 2z$. Der entsprechende Wert im Intervall $0 < x \leq \pi/2$ ist also die Wurzel der Gleichung $\operatorname{tg} x = 2/x$, wir nennen ihn x_{HS} und finden ziffernmässig $61^\circ 42' 1,2''$ oder in Bogenlänge $1,0768740$. Es gilt $H < S$ für $0 < x \leq x_{HS}$ und $S < H$ für $x_{HS} \leq x \leq \pi/2$. Der Beweis lässt sich detailliert in analoger Weise durchführen wie vorhin bezüglich der Mittelwerte S und G , wobei aber zu beachten ist, dass beim Übergang vom x - zum z -Intervall der Richtungssinn umdreht; was demnach für das zweite Teilintervall der Abbildung gilt, hat im ersten Teil des Originalintervalls Geltung und umgekehrt. M bestimmt sich aus der Gleichsetzung

$$n \sin \frac{1}{M} = \sum \sin \frac{1}{z},$$

und es gilt daher für das zweite Teilintervall der Abbildung, wo $F(z)$ konkav steigt:

$$M = \left[\arcsin \left(\frac{1}{n} \sum \sin \frac{1}{z} \right) \right]^{-1} < \frac{1}{n} \sum z = A, \quad \text{für } (x_{HS})^{-1} \leq z < \infty,$$

daher

$$\left[\arcsin \left(\frac{1}{n} \sum \sin x \right) \right]^{-1} < \frac{1}{n} \sum \frac{1}{x}, \quad \text{für } 0 < x \leq x_{HS},$$

also

$$S = \arcsin \left(\frac{1}{n} \sum \sin x \right) > \left(\frac{1}{n} \sum \frac{1}{x} \right)^{-1} = H, \quad \text{für } 0 < x \leq x_{HS}.$$

IV.

Der nächstgrössere elementare algebraische Mittelwert nach dem arithmetischen Mittel A ist bekanntlich das quadratische Mittel Q . Andererseits ist, wie gezeigt, das Kosinuskennittel C in $0 \leq x \leq \pi/2$ ebenfalls grösser als A . Es wäre aber voreilig, in bezug auf das Verhältnis von C zu Q Analogieschlüsse aus dem Verhältnis von S zu G ziehen zu wollen. Im ganzen Intervall 0 bis $\pi/2$ ist nämlich $C < Q$. Setzen wir $f(x) = 1 - \cos x$, $h(x) = x^2$, beide konvex steigend im genannten Intervall, und substituieren $x = \psi(z) = \sqrt{z}$, so wird $F(z) = 1 - \cos\sqrt{z}$. Diese Funktion ist im ganzen Intervall $0 \leq z \leq (\pi/2)^2$ schwach konkav steigend, also $C < Q$. Denn das Mittel M nach $F(z)$ ergibt sich aus der Gleichsetzung

$$n(1 - \cos\sqrt{M}) = \sum (1 - \cos\sqrt{z}),$$

also

$$M = \left[\arccos \left(\frac{1}{n} \sum \cos\sqrt{z} \right) \right]^2 < \frac{1}{n} \sum z = A$$

oder

$$\arccos \left(\frac{1}{n} \sum \cos\sqrt{z} \right) < \left(\frac{1}{n} \sum z \right)^{1/2}, \quad \text{in } 0 \leq z \leq \left(\frac{\pi}{2} \right)^2,$$

und daher

$$C = \arccos \left(\frac{1}{n} \sum \cos x \right) < \left(\frac{1}{n} \sum x^2 \right)^{1/2} = Q, \quad \text{in } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Die Tatsache, dass $C < Q$, ersieht man geometrisch auch, wenn man an Stelle von $h(x) = x^2$ die Funktion $(2x/\pi)^2$ setzt.

$$f(x) = 1 - \cos x \quad \text{und} \quad \bar{h}(x) = \left(\frac{2x}{\pi} \right)^2$$

verlaufen beide konvex steigend und haben beide für $x = 0$ den Wert Null und für $x = \pi/2$ den Wert 1. Dazwischen aber ist durchwegs $f(x) > \bar{h}(x)$, was besagt, dass $f(x)$ schwächer konvex verläuft, weshalb $C < Q$ sein muss.

V.

Wenn wir nunmehr den Tangens und den Kotangens als Funktionen, nach welchen gemittelt werden soll, in Betracht ziehen, so haben wir das Tangensmittel

$$T = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \operatorname{tg} x_i \right) \quad (7)$$

und das Kotangensmittel

$$Ct = \operatorname{arccotg} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \operatorname{ctg} x_i \right). \quad (8)$$

Wegen der in (1) vorausgesetzten Endlichkeit von $f(x)$ gilt unser Intervall 0 bis $\pi/2$

für (7) unter Ausschluss der oberen, für (8) unter Ausschluss der unteren Grenze. Da in diesem Intervall der Kotangens konvex fallend und der Tangens konvex steigend ist, muss gelten

$$Ct < A < T.$$

Fragen wir nun nach dem Verhältnis zwischen Tangensmittel und quadratischem Mittel, so lässt sich wiederum bezüglich des ganzen Intervalls keine Reihenfolge angeben. Setzen wir $f(x) = \operatorname{tg} x$, $h(x) = x^2$, beide konvex steigend, und substituieren $x = \sqrt{z}$, so hat die Funktion $F(z) = \operatorname{tg}\sqrt{z}$ in $0 \leq z \leq (\pi/2)^2$ einen Wendepunkt, vor welchem die Steigung konkav und nach welchem sie konvex ist. Der der Wendepunktsabszisse entsprechende Wert x_{TQ} im Intervall $0 \leq x < \pi/2$ ist die Wurzel der Gleichung $\operatorname{ctg} x = 2x$. Man erhält $x_{TQ} = 37^\circ 25' 46,8''$ oder in Bogenlänge 0,6532709. Es ist somit $T < Q$ für $0 \leq x \leq x_{TQ}$ und $Q < T$ für $x_{TQ} \leq x < \pi/2$.

Um die Stellung des Tangensmittels gegenüber dem Kosinusmittel abzuklären, setzt man $f(x) = \operatorname{tg} x$, $h(x) = 1 - \cos x$, und substituiert $x = \operatorname{arctg} z$. Es hat $H(z) = 1 - \cos(\operatorname{arctg} z)$ in $0 \leq x < \infty$ einen Wendepunkt; vor demselben steigt $H(z)$ konvex, nachher konkav. Die obere Grenze des Teilintervalls von $0 \leq x < \pi/2$, innerhalb welchem C grösser sein muss als T , bestimmen wir nach gleichem Verfahren wie bis anhin und finden, dass der betreffende Wert x_{TC} die Wurzel der Gleichung $\operatorname{tg} x = 1/\sqrt{2}$ sein muss. Es ist daher $T < C$ für $0 \leq x < x_{TC}$ und $C < T$ für $x_{TC} \leq x < \pi/2$, wobei $x_{TC} = 35^\circ 15' 51,8''$, in Bogenlänge 0,6154797.

Bleibt noch das Kotangensmittel, wobei wir uns kurz fassen können, denn das Verfahren ist stets das gleiche. Um Ct mit G zu vergleichen, setzt man $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $h(x) = \ln x$ und substituiert $x = e^z$. In $-\infty < z \leq \ln \pi/2$ hat $F(z) = \operatorname{ctg} e^z$ einen Wendepunkt. Der Wert x_{CtG} ist Wurzel der Gleichung $\operatorname{tg} x = 2x$. Es folgt $Ct < G$ für $0 < x \leq x_{CtG}$, $G < Ct$ für $x_{CtG} \leq x \leq \pi/2$, wobei $x_{CtG} = 66^\circ 46' 54,3''$ oder 1,1655614. Für den Vergleich von Ct mit S setzen wir $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $h(x) = 1 - \sin x$ und substituieren $x = \operatorname{arctg} z$. In $0 \leq x < \infty$ hat $H(z) = 1 - \sin(\operatorname{arctg} z)$ einen Wendepunkt. Der Wert x_{CtS} ist die Wurzel von $\operatorname{ctg} x = 1/\sqrt{2}$. Mithin ist $Ct < S$ für $0 < x \leq x_{CtS}$, $S < Ct$ für $x_{CtS} \leq x \leq \pi/2$, wobei $x_{CtS} = 54^\circ 44' 8,2''$ oder 0,9553166. Zwecks Vergleich von Ct mit H schliesslich setzen wir $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $h(x) = 1/x$ und substituieren $x = 1/z$. Die Funktion $F(z) = \operatorname{ctg} 1/z$ hat in $2/\pi \leq z < \infty$ keinen Wendepunkt, sondern steigt konkav, es ist also

$$M = \left[\operatorname{arc} \operatorname{ctg} \left(\frac{1}{n} \sum \operatorname{ctg} \frac{1}{z} \right) \right]^{-1} < \frac{1}{n} \sum z = A, \quad \text{in } \frac{2}{\pi} \leq z < \infty,$$

$$\left[\operatorname{arc} \operatorname{ctg} \left(\frac{1}{n} \sum \operatorname{ctg} x \right) \right]^{-1} < \frac{1}{n} \sum \frac{1}{x}, \quad \text{in } 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

$$Ct = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \left(\frac{1}{n} \sum \operatorname{ctg} x \right) > \left(\frac{1}{n} \sum \frac{1}{x} \right)^{-1} = H, \quad \text{in } 0 < x \leq \frac{\pi}{2},$$

das heisst, es ist durchwegs $H < Ct$.

Abschliessend wollen wir die Ergebnisse in einer tabellarischen Übersicht zusammenstellen, aus welcher die Position der trigonometrischen Mittelwerte innerhalb der

Reihe der elementaren algebraischen Mittelwerte zu ersehen ist. Im Intervall $0 < x < \pi/2$ gilt für

$$\begin{aligned}
 0 < x \leq x_{TC}: & \quad H < Ct < G < S < A < T < C < Q, \\
 x_{TC} \leq x \leq x_{TQ}: & \quad H < Ct < G < S < A < C < T < Q, \\
 x_{TQ} \leq x \leq x_{GS}: & \quad H < Ct < G < S < A < C < Q < T, \\
 x_{GS} \leq x \leq x_{CtS}: & \quad H < Ct < S < G < A < C < Q < T, \\
 x_{CtS} \leq x \leq x_{HS}: & \quad H < S < Ct < G < A < C < Q < T, \\
 x_{HS} \leq x \leq x_{CtG}: & \quad S < H < Ct < G < A < C < Q < T, \\
 x_{CtG} \leq x < \pi/2: & \quad S < H < G < Ct < A < C < Q < T,
 \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 x_{TC} = 35^\circ 15' 51,8'' = 0,6154797, & \quad x_{CtS} = 54^\circ 44' 8,2'' = 0,9553166, \\
 x_{TQ} = 37^\circ 25' 46,8'' = 0,6532709, & \quad x_{HS} = 61^\circ 43' 1,2'' = 1,0768740, \\
 x_{GS} = 49^\circ 17' 36,5'' = 0,8603334, & \quad x_{CtG} = 66^\circ 46' 54,3'' = 1,1655614.
 \end{aligned}$$

H = harmonisches Mittel, G = geometrisches Mittel,
 A = arithmetisches Mittel, Q = quadratisches Mittel,
 S = Sinusmittel, C = Kosinusmittel,
 Ct = Kotangensmittel, T = Tangensmittel.

H. JECKLIN, Zürich.

Kleine Mitteilungen

Geometrische Darstellung der Dimensionen physikalischer Grössen und ihre Anwendung

1. Darstellung der Dimensionen in einem Vektorraum

Wir setzen als gegeben voraus, dass sich jede physikalische Grösse A in der folgenden Weise durch ihre Dimensionen charakterisieren lässt¹⁾

$$[A] = A_1^{a_1} A_2^{a_2} \dots A_n^{a_n}, \quad (1)$$

wo die A_i die Grunddimensionen und die Exponenten a_i ganze oder rationale Zahlen sind. Gewöhnlich ist $n = 3$ oder $n = 4$. Die Dimension lässt sich dann isomorph auf ein geordnetes Zahlen- n -tupel abbilden, vermöge der Zuordnung

$$A_1^{a_1} A_2^{a_2} \dots A_n^{a_n} \longleftrightarrow [a_1, a_2, \dots, a_n] = \mathbf{a}. \quad (2)$$

Es ist nun naheliegend, die a_i als Koordinaten eines Vektors \mathbf{a} in einem affinen Vektorraum V_n aufzufassen²⁾. Für diese Vektoren lassen sich nämlich die üblichen Rechenregeln definieren.

¹⁾ E. BODEA, *Giorgis rationales MKS-Maßsystem mit Dimensionskohärenz* (Birkhäuser, Basel 1948), S. 26.

²⁾ H. WÜGER benützte ein kartesisches Koordinatensystem, was aber nicht nötig ist. Vgl. H. WÜGER, *Graphische Darstellung von Maßsystemen*, Bull. Schweiz. elektrotechn. Verein 22, 637–640 (1931).