

Sur l'équivalence des polyèdres à dièdres rationnels

Autor(en): **Sydler, J.-P.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **8 (1953)**

Heft 4

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-16919>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

X ist als Grenzlage des Schnittpunktes $G = (g_P, g_Q)$ für $Q \rightarrow P$ der Berührungspunkt der Geraden g_P mit der von ihr erzeugten Hüllkurve. Somit erhält man X als Fusspunkt des Lotes vom Krümmungsmittelpunkt M auf g_P .

Denken wir uns für jeden Kurvenpunkt P den Kreis k_P über $PM = \rho_P$ als Durchmesser konstruiert. Es folgt:

Bei der Umwandlung einer Kurve über ihre Evolutoiden in ihre Evolute läuft jeder Punkt auf einem Kreise.

Weiter erhält man sofort:

Dreht sich g_P mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω aus der Anfangslage t_P um π , so durchläuft der von P ausgehende Punkt X mit konstanter Geschwindigkeit $\omega \rho_P$ den Kreis k_P .

Diese Sätze erlauben, die Umformung im einzelnen zu verfolgen und sich ein anschauliches Bild von ihr zu verschaffen. L. LOCHER-ERNST, Winterthur.

Sur l'équivalence des polyèdres à dièdres rationnels

Deux polyèdres sont dits équivalents (mod 0) si l'on peut construire l'un avec les morceaux de l'autre augmenté d'un cube. Pour que deux polyèdres soient équivalents, il faut qu'ils vérifient les conditions de DEHN. Nous avons montré¹⁾ que si deux polyèdres remplissent ces conditions, leur différence est équivalente à un polyèdre dont tous les dièdres sont rationnels. Nous voulons montrer maintenant que:

Un polyèdre dont tous les dièdres sont rationnels est équivalent à un polyèdre dont tous les dièdres sont des multiples de $\pi/4$.

Avant de passer à la démonstration elle-même, nous établirons deux propriétés particulières dont nous aurons besoin par la suite.

a) Il existe un polyèdre

$$P\left(\alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha\right) \qquad \left[\alpha < \frac{\pi}{2}\right]$$

équivalent à un cube et ayant les propriétés suivantes:

1° Le long d'une arête $CC''C'$ ($\overline{CC''} = \overline{C''C'}$), il a un angle dièdre égal à α le long de CC'' et égal à $(\pi/2) - \alpha$ le long de $C''C'$, ces deux dièdres ayant une face commune.

2° Tous les autres dièdres sont des multiples de $\pi/4$.

En effet, considérons d'abord un prisme droit triangulaire $AA'BB'CC'$, la base étant un triangle isocèle de sommet B , l'angle ABC étant égal à 2α [nous supposons α plus petit que $\pi/4$, ayant le choix entre α et $(\pi/2) - \alpha$] (figure 1). Comme $\alpha < \pi/4$, il est possible de choisir la longueur AA' de telle sorte que le plan passant par la diagonale AC' et perpendiculaire à la face $AA'CC'$ coupe les faces $AA'BB'$ et $BB'CC'$ suivant des angles dièdres égaux à $3\pi/4$ et $\pi/4$.

Soient B'', D, D', D'', C'' les milieux des segments $B'B, BC, B'C', DD', CC'$. Le polyèdre $ABCB''C'$ est équivalent à un cube; il a le long des arêtes $BB'', CC'', C''C'$

¹⁾ J.-P. SYDLER, *Sur les conditions nécessaires pour l'équivalence des polyèdres euclidiens*, El. Math. 7, 49 (1952).

des angles dièdres égaux à 2α , $(\pi/2) - \alpha$, $(\pi/2) - \alpha$. Posons sur la face $BB''DD''$ un prisme droit $BB''DD''EE''$ ayant le long de BB'' un dièdre égal à $(\pi/2) - 2\alpha$ et un dièdre droit le long de EE'' ; enfin enlevons du polyèdre $DD''CC''FF''$ le symétrique de $BB''DD''EE''$ par rapport à DD'' . Le polyèdre $ABB''EE''FF''CC''C'$ donne un exemple du polyèdre cherché.

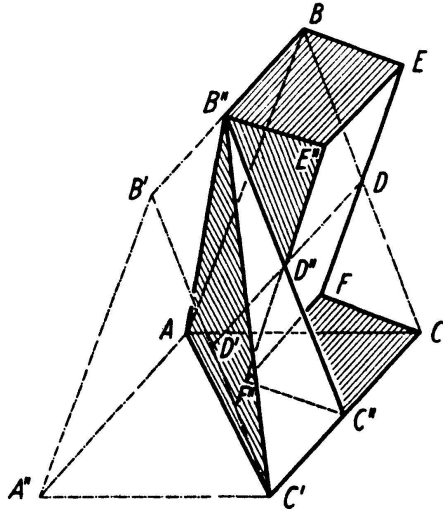


Fig. 1

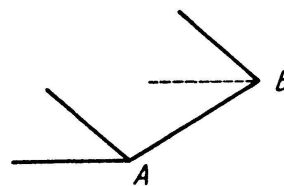


Fig. 2

b) Nous dirons qu'un dièdre (ou qu'une arête) est dégagé lorsqu'il est bordé par deux plans perpendiculaires à l'arête (figure 2). Si l'on a plusieurs dièdres dégagés le long de la même arête, il est aisé de les séparer en enlevant un prisme droit du polyèdre.

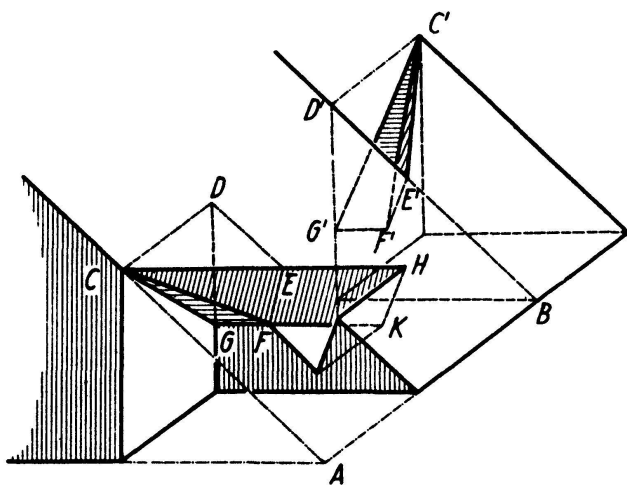


Fig. 3

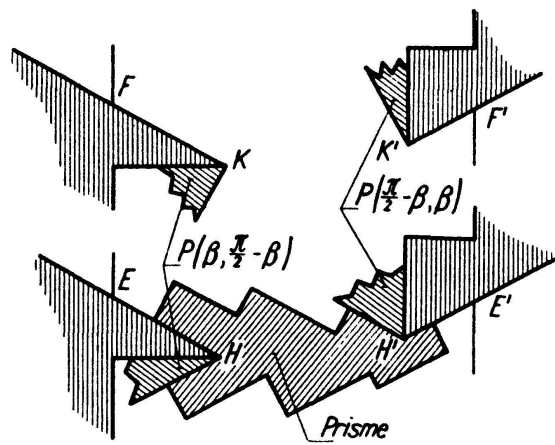


Fig. 4

Montrons qu'il est possible de déplacer un dièdre dégagé d'une longueur quelconque le long de son arête en n'introduisant que des dièdres égaux à des multiples de $\pi/4$, le polyèdre final étant équivalent au polyèdre initial.

Soit AB l'arête considérée (figure 3). Supposons d'abord le dièdre α suffisamment petit. Enlevons en A un prisme rectangulaire droit que nous rajouterons au delà de B , l'arête de ce prisme ayant la longueur du déplacement voulu. Soient CD et $C'D'$ les deux nouvelles arêtes de dièdres $(\pi/2) + \alpha$ et $(\pi/2) - \alpha$. Rajoutons le long de CD

une pyramide $CDEFG$ dont la base $DEFG$ est perpendiculaire à AB et dont le dièdre CD est égal à $(\pi/2) - \alpha$, les dièdres CE, CF, CG étant droits (ce qui est possible pour α assez petit, les segments de la base étant également petits, donc en dehors du polyèdre). Nous enlèverons un polyèdre symétrique le long de $C'D'$. Afin d'éviter des complications en F et F' , enlevons encore du polyèdre des prismes droits d'arêtes $EF, \dots, F'G'$ qui dégageront les dièdres non droits. Soient HK et $H'K'$ les arêtes des nouveaux dièdres provoqués par EF et $E'F'$, dont nous désignerons les grandeurs par $2\pi - \beta$ et $(3\pi/2) + \beta$. Le long de HK , nous enlevons un polyèdre $P[(\pi/2) - \beta, \beta]$;

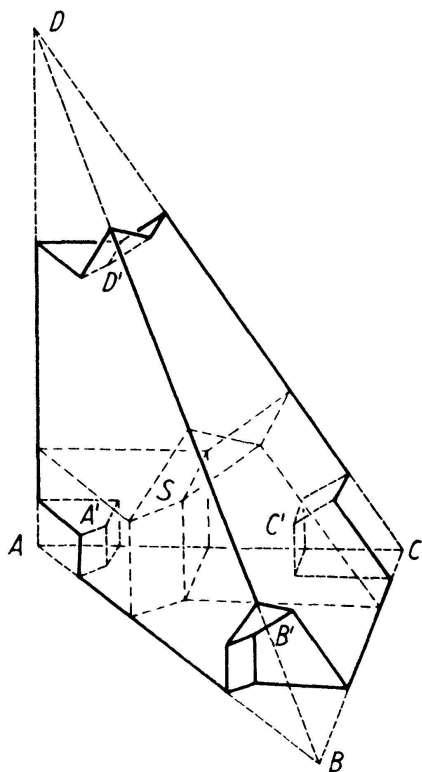


Fig. 5

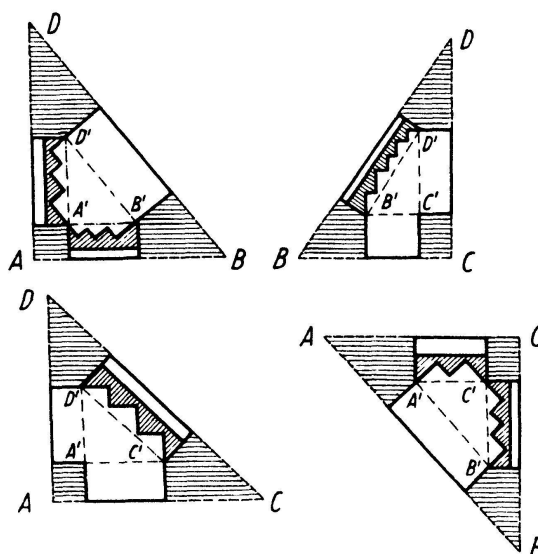


Fig. 6

nous enlevons aussi un le long de $H'K'$ de telle sorte que le long d'une moitié d'arête les dièdres deviennent droits, le long de la seconde moitié, ils deviennent égaux à $2\pi - 2\beta$ et à $\pi + 2\beta$, les faces étant parallèles. On peut dès lors enlever un prisme droit le long de ces demi-arêtes et supprimer ainsi tous les dièdres qui ne sont pas des multiples de $\pi/4$ (figure 4; les parties hachurées représentent les polyèdres à enlever). Remarquons que, s'il le faut pour que toute la construction reste à l'intérieur du polyèdre, on peut diviser les arêtes HK en k parties auxquelles on applique la même construction.

Nous agirons de même le long de FG .

Lorsque α est quelconque, il suffit de décomposer ce dièdre en n dièdres suffisamment petits auxquels on peut appliquer la construction ci-dessus.

Ces deux propriétés permettent d'établir que:

c) Tout polyèdre est équivalent à un polyèdre ayant les mêmes dièdres, mais dégagés, les arêtes correspondantes ayant la même longueur, et d'autres dièdres égaux à des multiples de $\pi/4$.

Montrons-le tout d'abord pour un tétraèdre \overline{ABCD} , $\overline{AB} \perp \overline{BC} \perp \overline{CD}$. Soit $ABCD$ un tétraèdre semblable et deux fois plus grand (linéairement) et soit S le centre de la sphère inscrite (figure 5). Les plans menés par S perpendiculairement aux arêtes décomposent de façon naturelle le tétraèdre en quatre polyèdres contenant chacun un des sommets A, B, C, D . Otons du tétraèdre à partir de chaque sommet des polyèdres semblables à ces quatre polyèdres et (linéairement) deux fois plus petits. Le polyèdre restant est équivalent (mod 0) à \overline{ABCD} puisque $P(2) \sim 2P(1)$. Soient $A'B'C'D'$ les homologues de S (donc les milieux de SA, SB, SC, SD). Le polyèdre restant a des dièdres dégagés le long de AB, \dots, CD . Par contre, il a de nouveaux dièdres complémentaires le long des arêtes issues de

- 1° A' et B' , perpendiculaires à ABC , 3° B' et D' , perpendiculaires à ABD ,
 2° B' et D' , perpendiculaires à BCD , 4° C' et D' , perpendiculaires à ACD .

On peut supprimer ces dièdres en enlevant du polyèdre quatre prismes droits perpendiculaires à ABC, BCD, ABD, ACD . Nous renvoyons à la figure 6 où les bases des prismes à enlever sont indiquées par des hachures.

Le polyèdre ainsi obtenu a des dièdres dégagés le long des arêtes AB, \dots, CD . La longueur des arêtes est la moitié de AB, \dots, CD . En vertu de la propriété b), il est possible de les déplacer et de les amener au milieu de AB, \dots, CD .

e) Nous voyons dès lors comment établir la propriété pour un polyèdre quelconque: Il suffit de décomposer régulièrement un polyèdre semblable deux fois plus grand en tétraèdres, puis en tétraèdres du genre précédent, de faire la construction ci-dessus pour chaque tétraèdre et de les assembler dans l'ordre primitif. Toutes les anciennes arêtes intérieures coïncideront à nouveau, de même que les arêtes situées sur les faces. Seuls les anciens dièdres subsisteront, ainsi que des dièdres égaux à des multiples de $\pi/4$, ce qui établit la propriété dans le cas général.

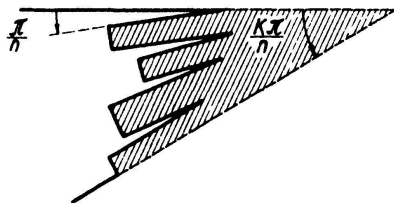


Fig. 7

f) Considérons maintenant un polyèdre ayant tous ses dièdres rationnels. Nous pouvons supposer que tous les dièdres différents d'un multiple de $\pi/4$ sont dégagés. En enlevant des prismes droits, nous pouvons remplacer tout dièdre $k\pi/n$ par k dièdres π/n , également dégagés (figure 7).

g) Montrons enfin que: On peut transformer un polyèdre ayant un dièdre dégagé $\beta = \pi/(2n)$ en un polyèdre équivalent de telle sorte que l'angle β disparaisse et que n'apparaissent que des dièdres égaux à un multiple de $\pi/4$.

En effet, divisons l'arête en n segments égaux $1, 2, \dots, n$. Posons *sur* le dièdre le long de 1-2 un polyèdre $P[(\pi/2) - \beta, \beta]$. Le dièdre le long de 1 est devenu droit; il devient égal à 2β le long de 2. Posons maintenant *sous* le dièdre le long de 2-3 un polyèdre $P[(\pi/2) - 2\beta, 2\beta]$. Le dièdre 2 devient droit, le dièdre 3 devient égal à 3β . Il suffit d'ajouter successivement dessus et dessous des polyèdres $P[(\pi/2) - k\beta, k\beta]$

pour éliminer l'angle β au bout de l'arête si n est impair, au milieu de l'arête si n est pair, tous les nouveaux dièdres étant des multiples de $\pi/4$.

Nous avons ainsi transformé un polyèdre à dièdres rationnels en un polyèdre équivalent dont tous les dièdres sont des multiples de $\pi/4$. Si l'on pouvait établir qu'un tel polyèdre est équivalent à un cube, on aurait montré que les conditions de DEHN sont nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres. Pour l'instant, nos résultats permettent seulement d'affirmer que: *Si deux polyèdres vérifient les conditions de Dehn, leur différence est équivalente à un polyèdre dont tous les dièdres sont des multiples de $\pi/4$.*

J.-P. SYDLER, Zurich.

Maximalstetige Kurven

Eine neue Charakterisierung der Kneser-Juelschen Bögen

Die reellen nichtanalytischen Kurven wurden zunächst von A. KNESER [1]¹⁾ im Anschluss an eine Begriffsbildung von STAUDTS [2] untersucht. CHR. JUEL [3] stützt sich auf den Begriff des konvexen Bogens, von dem J. HJELMSLEV [4] gezeigt hat, dass er zur Beschreibung der Gestaltverhältnisse reeller Kurven geeignet ist. Kürzlich hat L. LOCHER-ERNST [5] eine Darstellung auf neuer Grundlage gegeben. Der Kurvenbegriff in diesem Gebiet der Geometrie entspricht der anschaulichen Vorstellung einer frei aufs Papier gezeichneten Linie, also der «Grundvorstellung, dass eine ebene Kurve durch stetige Bewegung eines Punktes in einer Geraden und gleichzeitige Drehung der Geraden um den Punkt erzeugt wird, wobei sich die Richtung der Bewegung und der Sinn der Drehung nur in einzelnen, singulären Lagen der erzeugenden Elemente ändern» [1].

Es ist nun möglich – und soll hier ausgeführt werden –, den Begriff des nirgends singulären Bogens (KNESER), des Elementarbogens (JUEL) oder des einfachen Elementarbogens (LOCHER) allein durch eine *selbstdual gefasste Verschärfung der Stetigkeit* zu gewinnen, und zwar erweist sich das Kriterium als notwendig und hinreichend. Während der Begriff der Kurve mit überall eindeutiger und stetiger Tangente (völlig stetige Kurve [3], §3) noch zu weit ist²⁾ und durch ein weiteres Kriterium (Konvexität oder die sogenannten von-Staudtschen Sätze) eingeschränkt werden muss, zeigt es sich, dass die «Tangente im scharfen Sinn» nach BUSEMANN und FELLER [6], [7] unter Hinzunahme ihres Gegenstückes das gewünschte Kriterium ergibt, das wir maximale Stetigkeit nennen.

1. Innere Stetigkeit und Ordnung (auf der Kurve)

Es sei eine linear geordnete stetige Menge K von Linienelementen Pp der projektiven Ebene gegeben. Es gelten in K die Zwischenrelationen und das Schnittaxiom. Es gibt Intervallschachtelungen.

¹⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 85.

²⁾ Anmerkung bei der Korrektur: Die bei solchen Kurven möglichen Stellen werden in einer gleichzeitig im «Archiv der Mathematik» erscheinenden Arbeit untersucht: *Ein Kriterium für die Kneser-Juelschen Kurven.*