

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Band: 8 (1953)
Heft: 4

Artikel: Die Simpsonsche Formel für die zweifache Integration
Autor: Tordion, Georges
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-16921>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Die Simpsonsche Formel für die zweifache Integration

Der Grundgedanke dieser Arbeit liegt in der Anwendung der Laplaceschen Transformation für die Gewinnung verschiedener Formeln der numerischen Integration, insbesondere der Simpsonschen Formel für einfache und zweifache Quadratur. Zuerst behandeln wir die λ -fache numerische Quadratur:

$$F(x_n) = \int_{x_0}^{x_n} \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x f(x) dx dx \dots dx.$$

Dieses Problem kann zurückgeführt werden auf die Lösung der Differentialgleichung $F(x)^{(\lambda)} = f(x)$ mit den Anfangsbedingungen

$$F(x_0) = F'(x_0) = F''(x_0) = \dots = F^{(\lambda-1)}(x_0) = 0.$$

Die Anwendung der Laplaceschen Transformation ist naheliegend, und es ist nach dem Differentiationsatz mit Berücksichtigung der Anfangsbedingungen:

$$\mathcal{L}\{F(x)^{(\lambda)}\} = \mathcal{L}\{f(x)\} = p^\lambda \mathcal{L}\{F(x)\}. \quad (1)$$

Das Integrationsintervall wird in eine Anzahl Intervalle, die untereinander nicht gleich zu sein brauchen, eingeteilt. Es wird ferner ohne Einschränkung der Allgemeinheit $x_0 = 0$ gewählt. Im Intervall (x_{s-1}, x_s) wird die Funktion $f(x)$ ersetzt durch eine Funktion $\varphi_s(x)$, welche je nach gewünschter Genauigkeitsstufe eine Konstante, eine lineare oder quadratische Funktion sein kann. Es wird dann eine Funktion $g_s(x)$ mit folgenden Eigenschaften definiert:

$$g_s(x) \begin{cases} = 0 & x < x_{s-1}, \\ = \varphi_s(x) & x_{s-1} < x < x_s, \\ = 0 & x > x_s. \end{cases}$$

Ihre Laplace-Transformierte ist

$$\mathcal{L}\{g_s(x)\} = \int_{x_{s-1}}^{x_s} e^{-px} \varphi_s(x) dx. \quad (2)$$

Die zu integrierende Funktion $f(x)$ kann dargestellt werden als eine Summe der Funktionen $g_s(x)$:

$$f(x) = \sum_{s=1}^n g_s(x).$$

Weil die Laplace-Transformierte einer Summe gleich der Summe der Laplace-Transformierten der Summanden ist, kann man schreiben

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \sum_{s=1}^n \mathcal{L}\{g_s(x)\}.$$

Zusammen mit der Gleichung (1) ergibt sich:

$$\mathcal{Q}\{F(x)\} = \sum_{s=1}^n \frac{\mathcal{Q}\{g_s(x)\}}{p^\lambda}. \quad (3)$$

$\mathcal{Q}\{F(x)\}$ kann für gewählte $g_s(x)$ rücktransformiert werden, wodurch man für $x = x_n$ die gewünschte Quadratur erhält. Dieses ganz allgemeine Verfahren wird an dieser Stelle aus Platzgründen nur auf die zweifache Integration mit quadratischem $\varphi_s(x)$ angewendet.

Das Integrationsintervall wird in $2n$ Intervalle eingeteilt. Für die Ordinaten y_{2s-2} , y_{2s-1} , y_{2s} mit den Abszissen x_{2s-2} , x_{2s-1} , x_{2s} wird die Gleichung einer quadratischen Parabel aufgestellt:

$$\varphi_s(x) = A_s x^2 + B_s x + C_s.$$

Für die Koeffizienten gilt:

$$\begin{aligned} A_s &= \frac{y_{2s-2}(x_{2s} - x_{2s-1}) - y_{2s-1}(x_{2s} - x_{2s-2}) + y_{2s}(x_{2s-1} - x_{2s-2})}{(x_{2s} - x_{2s-1})(x_{2s} - x_{2s-2})(x_{2s-1} - x_{2s-2})}, \\ B_s &= -\frac{y_{2s-2}(x_{2s}^2 - x_{2s-1}^2) - y_{2s-1}(x_{2s}^2 - x_{2s-2}^2) + y_{2s}(x_{2s-1}^2 - x_{2s-2}^2)}{(x_{2s} - x_{2s-1})(x_{2s} - x_{2s-2})(x_{2s-1} - x_{2s-2})}, \\ C_s &= \frac{y_{2s-2}x_{2s}x_{2s-1}(x_{2s} - x_{2s-1})}{(x_{2s} - x_{2s-1})(x_{2s} - x_{2s-2})(x_{2s-1} - x_{2s-2})} \\ &\quad - \frac{y_{2s-1}x_{2s}x_{2s-2}(x_{2s} - x_{2s-2}) - y_{2s}x_{2s-1}x_{2s-2}(x_{2s-1} - x_{2s-2})}{(x_{2s} - x_{2s-1})(x_{2s} - x_{2s-2})(x_{2s-1} - x_{2s-2})}. \end{aligned}$$

Es ist dann nach der Durchführung der Einzelintegrationen entsprechend Gleichung (2):

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}\{F(x)\} &= \sum_{s=1}^n \left\{ A_s \left[-\frac{x_{2s}^2 e^{-p x_{2s}}}{p^\lambda} - \frac{2 x_{2s} e^{-p x_{2s}}}{p^{\lambda+1}} - \frac{2 e^{-p x_{2s}}}{p^{\lambda+2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{x_{2s-2}^2 e^{-p x_{2s-2}}}{p^\lambda} + \frac{2 x_{2s-2} e^{-p x_{2s-2}}}{p^{\lambda+1}} + \frac{2 e^{-p x_{2s-2}}}{p^{\lambda+2}} \right] \right. \\ &\quad \left. + B_s \left[-\frac{x_{2s} e^{-p x_{2s}}}{p^\lambda} - \frac{e^{-p x_{2s}}}{p^{\lambda+1}} + \frac{x_{2s-2} e^{-p x_{2s-2}}}{p^\lambda} + \frac{e^{-p x_{2s-2}}}{p^{\lambda+1}} \right] \right. \\ &\quad \left. + C_s \left[-\frac{e^{-p x_{2s}}}{p^\lambda} + \frac{e^{-p x_{2s-2}}}{p^\lambda} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Die Rücktransformation ergibt:

$$\begin{aligned} F(x_{2n}) &= \sum_{s=1}^n \left\{ A_s \left[-\frac{x_{2s}^2 (x_{2n} - x_{2s})^\lambda}{\lambda!} - \frac{2 x_{2s} (x_{2n} - x_{2s})^{\lambda+1}}{(\lambda+1)!} - \frac{2 (x_{2n} - x_{2s})^{\lambda+2}}{(\lambda+2)!} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{x_{2s-2}^2 (x_{2n} - x_{2s-2})^\lambda}{\lambda!} + \frac{2 x_{2s-2} (x_{2n} - x_{2s-2})^{\lambda+1}}{(\lambda+1)!} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2 (x_{2n} - x_{2s-2})^{\lambda+2}}{(\lambda+2)!} \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + B_s \left[-\frac{x_{2s}(x_{2n}-x_{2s})^\lambda}{\lambda!} - \frac{(x_{2n}-x_{2s})^{\lambda+1}}{(\lambda+1)!} - \frac{x_{2s-2}(x_{2n}-x_{2s-2})^\lambda}{\lambda!} \right. \\
& \quad \left. + \frac{(x_{2n}-x_{2s-2})^{\lambda+1}}{(\lambda+1)!} \right] \\
& + C_s \left[-\frac{(x_{2n}-x_{2s})^\lambda}{\lambda!} + \frac{(x_{2n}-x_{2s}-2)^\lambda}{\lambda!} \right] \}.
\end{aligned}$$

Für $\lambda = 1$ und gleiche Abszissenintervalle, das heisst wenn $x_{2n} = 2n \Delta x$, $x_{2s} = 2s \Delta x$, $x_{2s-1} = (2s-1) \Delta x$ usf., ergibt sich daraus

$$F(x_{2n}) = \frac{\Delta x}{3} \sum_{s=1}^n \{y_{2s-2} + 4y_{2s-1} + y_{2s}\};$$

das ist die bekannte Simpsonsche Formel.

Für $\lambda = 2$ und ebenfalls gleiche Abszissenintervalle ergibt sich:

$$F(x_{2n}) = \frac{2}{3} \Delta x^2 \sum_{s=1}^n \{[(n-s)+1]y_{2s-2} + [4(n-s)+2]y_{2s-1} + [n-s]y_{2s}\}.$$

Das ist die Simpsonsche Formel für die zweifache Integration. Die eckigen Klammern können für eine bestimmte Intervallzahl im voraus tabelliert werden. Es werden hier zwei Beispiele der Anwendung für $2n = 12$ angeführt:

1. Beispiel:

$$F(12) = \int_0^{12} \int_0^x x^2 dx dx = 1728.$$

Nach der soeben entwickelten Formel und in etwas abgekürzter Schreibweise hat man:

$$\begin{aligned}
F(12) &= \frac{2}{3} 1^2 [6 \cdot 0 + 2(5 \cdot 4 + 4 \cdot 16 + 3 \cdot 36 + 2 \cdot 64 + 100) \\
& \quad + 22 + 18 \cdot 9 + 14 \cdot 25 + 10 \cdot 49 + 6 \cdot 81 + 2 \cdot 121] \\
&= \frac{2}{3} 2592 = 1728.
\end{aligned}$$

2. Beispiel:

$$F(\pi) = \int_0^\pi \int_0^x \sin x dx dx = \pi.$$

Oder

$$\begin{aligned}
F(\pi) &= \frac{2}{3} 0,2618^2 [6 \cdot 0 + 2(5 \cdot 0,5000 + 4 \cdot 0,8660 + 3 \cdot 1,0000 \\
& \quad + 2 \cdot 0,08660 + 1 \cdot 0,5000) + 22 \cdot 0,2588 + 18 \cdot 0,7071 \\
& \quad + 14 \cdot 0,9659 + 10 \cdot 0,9659 + 6 \cdot 0,7071 + 2 \cdot 0,2588] \\
&= \frac{2}{3} 0,2618^2 \cdot 68,7552 = 3,1416
\end{aligned}$$

mit drei richtigen Dezimalen.

GEORGES TORDION, Zürich.