Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 8 (1953)
Heft: 4

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Aufgaben

Aufgabe 155. Man beweise: Sind von einer Parabel zwei Tangenten t_1 und t_2 mit dem Schnittpunkt T und mit den Berührungspunkten P_1 und P_2 gegeben, so ist der Brennpunkt der Schnittpunkt des Kreises durch P_1, der t_2 in T berührt, mit dem Kreis durch P_2, der t_1 in T berührt. F. HOHENBERG, Graz.

Lösung: J.-H. LAMBERT bewies 1761 den Satz: Der Umkreis eines Tangentendreiecks einer Parabel geht durch ihren Brennpunkt. Lässt man eine Tangente des betrachteten Tangentendreiseits gegen eine zweite konvergieren, so ergibt sich aus dem Lambertschen Satz die Aussage:

Sind von einer Parabel zwei Tangenten t_1 und t_2 mit dem Schnittpunkt T und mit den Berührungspunkten P_1 und P_2 gegeben, so liegt der Brennpunkt F auf dem Kreis, der t_2 (bzw. t_1) in T berührt und durch P_1 (bzw. P_2) geht.

F ist also der Schnittpunkt der beiden Kreise, womit der Satz der Aufgabe bewiesen ist.

Die obige Aussage lässt sich auch direkt aus völlig elementaren Parabeleigenschaften gewinnen. Die Fusspunkte Q_1 und Q_2 der Lote aus F auf t_1 und t_2 liegen auf der Scheiteltangente s. FQ_1 bildet also mit s denselben Winkel α wie t_1 mit der Parabelachse. Aus der Spiegeleigenschaft folgt ferner $\sphericalangle FP_1T = \alpha$. Da TQ_1FQ_2 ein Sehnenviereck ist, ist $\sphericalangle FTQ_2 = \alpha$. Nach dem Satz vom Sehnen-Tangenten-Winkel muss also t_2 den Umkreis des Dreiecks FP_1T in T berühren. Das entsprechende Resultat ergibt sich für t_1.

R. BEREIS, Wien, und A. STOLL, Zürich.

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring, Dänemark), L. BERNSTEIN (Tel Aviv), J. BEST (Amsterdam), F. GOLDNER (London), U. HOFMANN (Olten), R. JAKOBI (Braunschweig), J. KÄUFL (Landshut, Bayern), L. KIEFFER (Luxemburg), R. KUTSMICHEL (Hanau), J. LANGR (Prag), R. LAUFFER (Graz), J. SCHOPP (Budapest), A. SCHWARZ (Seuzach), A. UNTERBERGER (Bludenz).

Aufgabe 156. Eine Gummischnur wird um ein Ende mit der Winkelgeschwindigkeit w gedreht und durch die Fliehkräfte gedehnt. Wie gross ist die Länge L der gedehnten Schnur, wenn die ungedehnte Schnur die Länge L_0 hat, die Masse pro Längeneinheit in ungedehntem Zustand m_0 ist und die Dehnung (Verlängerung pro Längeneinheit) infolge der Zugkraft P gleich eP ist (Hookesches Gesetz bei Vernachlässigung der Querdehnung)? R. LAUFFER, Graz.

Lösung des Aufgabenstellers: Wirkt bei der Drehung an der Stelle x, vom ruhenden Ende gemessen, die Zugkraft $P = P(x)$, dann ist an dieser Stelle die Dehnung eP und daher die Masse pro Längeneinheit

$$m = \frac{m_0}{1 + eP}. \tag{1}$$

Das Differential der Kraft ist $dP = -w^2 m x\, dx$, und wegen (1) hat man

$$(1 + eP)\, dP = -w^2 m_0 x\, dx.$$

Die Integration gibt

$$(1 + eP)^2 = -w^2 m_0 e x^2 + C. \tag{2}$$

Für $x = L$ ist $P = 0$, also $C = 1 + w^2 m_0 e L^2$. Hieraus folgt mit (1) und (2)

$$m = m_0 : \sqrt{w^2 m_0 e (L^2 - x^2) + 1}.$$

Die Masse der gedehnten Schnur vom ruhenden Ende bis zur Stelle x ist

$$M(x) = \int_0^x m\, dx = m_0 \int_0^x dx : \sqrt{w^2 m_0 e (L^2 - x^2) + 1}.$$

Ist y die Länge dieses Stückes der Schnur in ungedehntem Zustand, dann ist mit $k^2 = w^2 m_0 e$

$$y = M(x) : m_0 = \int_0^x dx : \sqrt{w^2 m_0 e (L^2 - x^2) + 1} = k^{-1} \arcsin\left(\frac{k x}{\sqrt{1 + k^2 L^2}}\right).$$

(Man beachte, dass $m_0 e$ eine Materialkonstante ist.) Setzt man $x = L$ und $y = L_0$, dann erhält man die Länge der gedehnten Schnur

$$L = \frac{1}{k} \operatorname{tg} k L_0 .$$

Aufgabe 157. Zeige, dass für willkürliche positive ganze Zahlen m und n gilt

$$\prod_k \left\{1 - \left[\frac{(2n+1)m}{k}\right]^2\right\} = 1,$$

wo k alle natürlichen Zahlen mit Ausnahme der Vielfachen von $2n+1$ durchläuft.

B. VAN DER POL, Genf.

Lösung: i sei eine feste natürliche Zahl. Wir betrachten das Produkt $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$, wo $a_i = 1$ und $a_k = 1 - i^2/k^2$ für $k \neq i$. Setzen wir

$$b_k = \frac{(i-k)(i+k)}{k\,k} \text{ für } k < i, \quad b_k = \frac{(k-i)(k+i)}{k\,k} \text{ für } k > i \text{ und } b_i = 1,$$

so ist

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_k = (-1)^{i-1} \prod_{k=1}^{\infty} b_k,$$

und beide Produkte sind gleichzeitig konvergent oder divergent. Der Faktor k tritt für $k < i$ je einmal im Zähler von b_{i-k} bzw. b_{i+k} auf, für $k > i$ je einmal im Zähler von b_{k-i} bzw. b_{k+i}. Im Teilprodukt $\prod_{k=1}^{t+i} b_k$ $(t > i)$ können also alle Faktoren $1, 2, 3, \ldots, t$ im Nenner gekürzt werden, so dass im Nenner des Produktes nur

$$[(t+1)(t+2)\cdots(t+i)]^2$$

übrigbleibt. Im Zähler des Produktes stehen $2i$ Faktoren aus der Reihe $t+1$, $t+1$, $t+2$, $t+2$, $\ldots$, $t+2i$, $t+2i$. Hieraus folgt

$$1 < \prod_{k=1}^{t+i} b_k \leqq \left[\frac{(t+i+1)(t+i+2)\cdots(t+2i)}{(t+1)(t+2)\cdots(t+i)}\right]^2$$
$$= \left[\left(1 + \frac{i}{t+1}\right)\cdots\left(1 + \frac{i}{t+i}\right)\right]^2 < \left(1 + \frac{i}{t+i}\right)^{2i}.$$

Für $t \to \infty$ ergibt sich

$$\prod_{k=1}^{\infty} b_k = 1, \quad \text{also} \quad \prod_{k=1}^{\infty} a_k = (-1)^{i-1}.$$

Man hat nun

$$\prod_{k \neq (2n+1)m} \left\{1 - \left[\frac{(2n+1)m}{k}\right]^2\right\} = (-1)^{2nm+m-1} = (-1)^{m-1},$$

$$\prod_{k \neq m} \left\{1 - \left[\frac{(2n+1)m}{(2n+1)k}\right]^2\right\} = \prod_{k \neq m} \left(1 - \frac{m^2}{k^2}\right) = (-1)^{m-1}.$$

Durch Division folgt jetzt sofort das verlangte Resultat.

A. BAGER, Hjørring, Dänemark.

Weitere Lösungen sandten L. BERNSTEIN (Tel Aviv), E. GISI (Basel), R. LAUFFER (Graz).

Aufgabe 158. Beweise für ein ganzes $m \geqq 0$

$$\frac{1^{4m+1}}{e^{\pi}+1} + \frac{3^{4m+1}}{e^{3\pi}+1} + \frac{5^{4m+1}}{e^{5\pi}+1} + \cdots = \frac{2^{4m+1}-1}{4(2m+1)} B_{2m+1},$$

wo $B_1 = 1/6$, $B_2 = 1/30$, $B_3 = 1/42, \ldots$ die Bernoullischen Zahlen sind. E. TROST, Zürich.

Lösung des Aufgabenstellers: Wir machen Gebrauch von der Formel

$$\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2\pi^2 + x^2}$$

und erhalten

$$e^{-\pi x} + e^{-3\pi x} + e^{-5\pi x} + \cdots = \frac{e^{-\pi x}}{1 - e^{-2\pi x}} = \frac{1}{2 \sinh \pi x}$$

$$= \frac{1}{2\pi x} + \frac{x}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + x^2} = \frac{1}{2\pi x} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{x + i n} + \frac{(-1)^n}{x - i n} \right].$$

Durch $(4m+1)$-malige Differentiation finden wir

$$I(x) = 1^{4m+1} e^{-\pi x} + 3^{4m+1} e^{-3\pi x} + 5^{4m+1} e^{-5\pi x} + \cdots$$

$$= \frac{(4m+1)!}{2\pi^{4m+2}} \cdot \frac{1}{x^{4m+2}} - \frac{1}{2\pi^{4m+2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(x+in)^{4m+2}} + \frac{(-1)^n}{(x-in)^{4m+2}} \right].$$

Jetzt ergibt sich

$$S = \frac{1^{4m+1}}{e^{\pi}+1} + \frac{3^{4m+1}}{e^{3\pi}+1} + \frac{5^{4m+1}}{e^{5\pi}+1} + \cdots = \sum_{x=1}^{\infty} (-1)^{x+1} I(x)$$

$$= \frac{(4m+1)!}{2\pi^{4m+2}} (1 - 2^{-4m-1}) \zeta(4m+2)$$

$$+ \frac{1}{2\pi^{4m+2}} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+m}}{(m+in)^{4m+2}} + \frac{(-1)^{n+m}}{(m-in)^{4m+2}} \right].$$

Wegen $(m - in)^{4m+2} = -(im + n)^{4m+2}$ verschwindet die Doppelsumme. Mit

$$\zeta(2m) = \frac{2^{2m-1} \pi^{2m} B_m}{(2m)!}$$

erhält man jetzt

$$S = \frac{(4m+1)!}{2\pi^{4m+2}} (1 - 2^{-4m-1}) \zeta(4m+2) = \frac{2^{4m+1}-1}{4(2m+1)} B_{2m+1}.$$

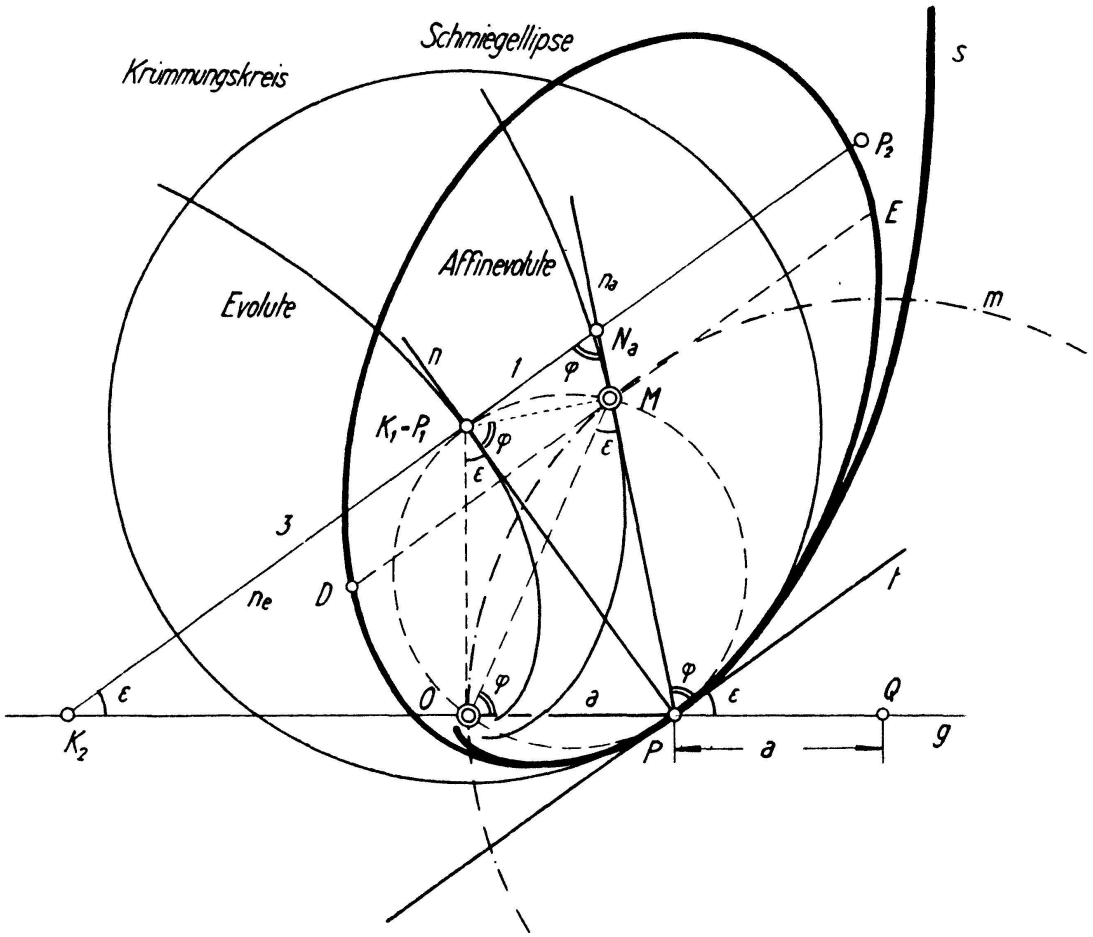
Aufgabe 159. Gegeben ist eine Ellipse e. Man konstruiere jene logarithmische Spirale, für die e ein Schmiegkegelschnitt ist. R. BEREIS, Wien.

Lösung des Aufgabenstellers: Aus der Definition der logarithmischen Spirale als isogonale Trajektorie eines Strahlbüschels folgt unmittelbar, dass irgend zwei logarithmische Spiralen, die zu demselben Spiralpunkt O und demselben Durchsetzungswinkel ε gehören, sich sowohl durch eine Streckung von O aus als auch durch eine Drehung um O ineinander überführen lassen. Die Schmiegellipsen einer logarithmischen Spirale (es treten hier nur Ellipsen als Schmiegkegelschnitte auf) sind daher alle untereinander ähnlich. Ferner gilt der Satz: «Der Berührpunkt einer Schmiegellipse einer logarithmischen Spirale liegt stets in einem Endpunkt eines ihrer beiden gleich langen konjugierten Durchmesser; der spitze Winkel φ der beiden gleich langen konjugierten Durchmesser der Schmiegellipse steht zu dem Durchsetzungswinkel ε der logarithmischen Spirale in dem einfachen funktionellen Zusammenhang: $\operatorname{tg} \varphi = 3 \operatorname{tg} \varepsilon$.»

Da dieser von FABRICIUS-BJERRE[1]) gefundene Satz nicht allgemein bekannt sein dürfte, soll hier eine einfache Ableitung desselben folgen: Führt man einen Punkt P

[1]) FR. FABRICIUS-BJERRE, *On the Osculating Conics of Cycloids*, Mat. Tidsskr. [B] *35*, 27 (1951).

eines Stabes g längs einer logarithmischen Spirale s, während g stets durch den Spiralpunkt O gleitet, so kann die Kurventangente, Normale und Affinnormale durch mit g starr verbundene Stäbe für die gesamte Bewegung realisiert werden. Das Momentanzentrum P_1 (= Schnitt der Kurvennormalen n mit der in O zu g errichteten Normalen) ist mithin als Berührungspunkt der Bahnnormalen n mit der Evolute die Bahnkrümmungsmitte K_1 von P. Da ferner n den Radiusvektor OP unter dem Winkel ε schneidet, ist die Evolute der logarithmischen Spirale eine zu s kongruente Spirale, wie denn überhaupt jede mit g in P starr verbundene Gerade im Ablauf der Bewegung eine zu s



kongruente logarithmische Spirale umhüllt. In gleicher Weise ergibt sich die Krümmungsmitte der Evolute für P_1, also die zweite Bahnkrümmungsmitte K_2 von P im Schnitt der Geraden g mit der Evolutennormalen n_e in K_1. Jener Punkt N_a von n_e, für den die Beziehung

$$\overline{K_2K_1} = 3\,\overline{K_1N_a} \tag{1}$$

gilt, gehört bekanntlich der Affinnormalen n_a von P an[1]). Somit schliesst die Affinnormale n_a mit der Bahntangente t den konstanten Winkel φ ein, für den

$$\operatorname{tg}\varphi = 3\operatorname{tg}\varepsilon \tag{2}$$

gilt. Der Berührungspunkt M der Affinnormalen n_a mit der Affinevolute, die nach dem Gesagten ebenfalls eine zu s kongruente Spirale sein muss, ist der Mittelpunkt der Schmiegellipse für P. M ist der Fusspunkt des aus dem Momentanzentrum P_1 auf n_a gefällten Lotes. Die Mitten der Schmiegkegelschnitte aller durch P gehenden logarithmischen Spiralen mit gemeinsamem Spiralpunkt O für den Punkt P liegen daher auf

[1]) W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, Bd. 2 (Springer, Berlin 1923), S. 33.

einem Kreis m durch O mit dem Radius $2\,\overline{OP}$. Ist ferner $\overline{PM} = c$ und wird mit b der konjugierte Halbmesser bezeichnet, so gilt[1])

$$\overline{PP_1} = \frac{b^2}{c \sin\varphi} = \frac{c}{\sin\varphi},$$

aus welcher Beziehung unmittelbar die Gleichheit von c und b folgt, so dass der oben angeführte Satz von FABRICIUS-BJERRE durch einfache kinematische Überlegungen bewiesen ist.

Die rückläufige Konstruktion der logarithmischen Spirale s aus einem ihrer Schmiegkegelschnitte ist nun fast trivial. Man konstruiert einen Endpunkt P eines der beiden gleich langen konjugierten Durchmesser, zeichnet in P Ellipsentangente und Normale und errichtet in der Ellipsenmitte M auf den Durchmesser MP das Lot. Dieses schneidet n in der Krümmungsmitte P_1 von P. Die in P_1 zu n errichtete Normale n_e schneidet PM in einem Punkt N_a, wodurch sich auf n_e der Punkt K_2 mittels Beziehung (1) zeichnen lässt. K_2P trägt den Spiralpunkt O (= Schnitt des aus P_1 auf K_2P gefällten Lotes mit K_2P).

Rechnerische Lösungen sandten R. LAUFFER (Graz) und A. UNTERBERGER (Bludenz).

Neue Aufgaben

185. Erweiterung der « Schachtelaufgabe »: Aus einem quadratischen Karton werden an den vier Ecken kongruente Deltoide (statt der üblichen Quadrate) ausgeschnitten, worauf die verbleibenden Randtrapeze aufgebogen werden, so dass eine Schachtel in Form eines Pyramidenstumpfes entsteht. Welche Abmessungen müssen die ausgeschnittenen Zwickel haben, damit das Schachtelvolumen ein Maximum wird, und welche Neigung gegen den Boden besitzen dann die Seitenflächen? W. WUNDERLICH, Wien.

186. Variante der « Schachtelaufgabe »: Aus einem quadratischen Karton werden an den vier Ecken krummlinig begrenzte Zwickel ausgeschnitten, derart, dass die verbleibenden Randstücke, längs Viertelkreiszylindern aufgebogen, sich lückenlos zusammenschliessen. Für welchen Zylinderradius erhält der entstehende Behälter den grössten Inhalt? W. WUNDERLICH, Wien.

187. Verallgemeinerung der « Schachtelaufgabe »: Aus einem quadratischen Karton sind an den vier Ecken kongruente, krummlinig begrenzte Zwickel auszuschneiden, derart, dass der durch zylindrisches Aufbiegen der Reststücke entstehende Behälter den grösstmöglichen Inhalt bekommt. Welches Profil erhalten hierbei die Seitenwände? W. WUNDERLICH, Wien.

188. Ein Punkt heisse « rational in bezug auf ein zweidimensionales kartesisches Koordinatensystem », wenn seine beiden Koordinaten rationale Zahlen sind. Man beweise: Wenn eine Kreislinie drei im obigen Sinne rationale Punkte enthält, dann liegen solche auf ihr überall dicht. A. STOLL, Zürich.

189. Es bedeute ω die Masszahl des Raumwinkels einer Ecke eines regelmässigen Polyeders und Ω die Masszahl der Summe der Raumwinkel des Polyeders ($\Omega = e\,\omega$, wobei e die Eckenanzahl). Als Einheit nehmen wir den vollen Raumwinkel; für den Würfel ist also $\omega = 1/8$, $\Omega = 1$. Zwischen den Zahlen Ω der regelmässigen Polyeder bestehen eigentümliche Beziehungen, die anzugeben und zu beweisen sind. Zum Beispiel:

Ω (Oktaeder)	$+\ \Omega$ (8eckiger Tetraederstern)	$= 1$,
Ω (Dodekaeder)	$+\ \Omega$ (20eckiges Sterndodekaeder)	$= 5$,
Ω (Dodekaeder)	$-\ \Omega$ (12eckiges Sterndodekaeder)	$= 4$,
Ω (12eckiges Sterndodekaeder)	$+\ \Omega$ (20eckiges Sterndodekaeder)	$= 1$,
Ω (Dodekaeder)	$+\ \Omega$ (sterneckiges Dodekaeder)	$= 7$,
Ω (Ikosaeder)	$+\ \Omega$ (sterneckiges Ikosaeder)	$= 3$.

L. LOCHER-ERNST, Winterthur.

[1]) Die hier verwendete Formel für den Krümmungsradius $\overline{PP_1}$ findet man in El. Math. *3*, 81 (1948). Red.