

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Band: 8 (1953)
Heft: 5

Artikel: Bilder zur Geometrie der regelmässigen Figuren
Autor: Locher-Ernst, L.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-16922>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 19.11.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer*

El. Math. Band VIII Nr. 5 Seiten 97–120 Basel, den 15. September 1953

Bilder zur Geometrie der regelmässigen Figuren

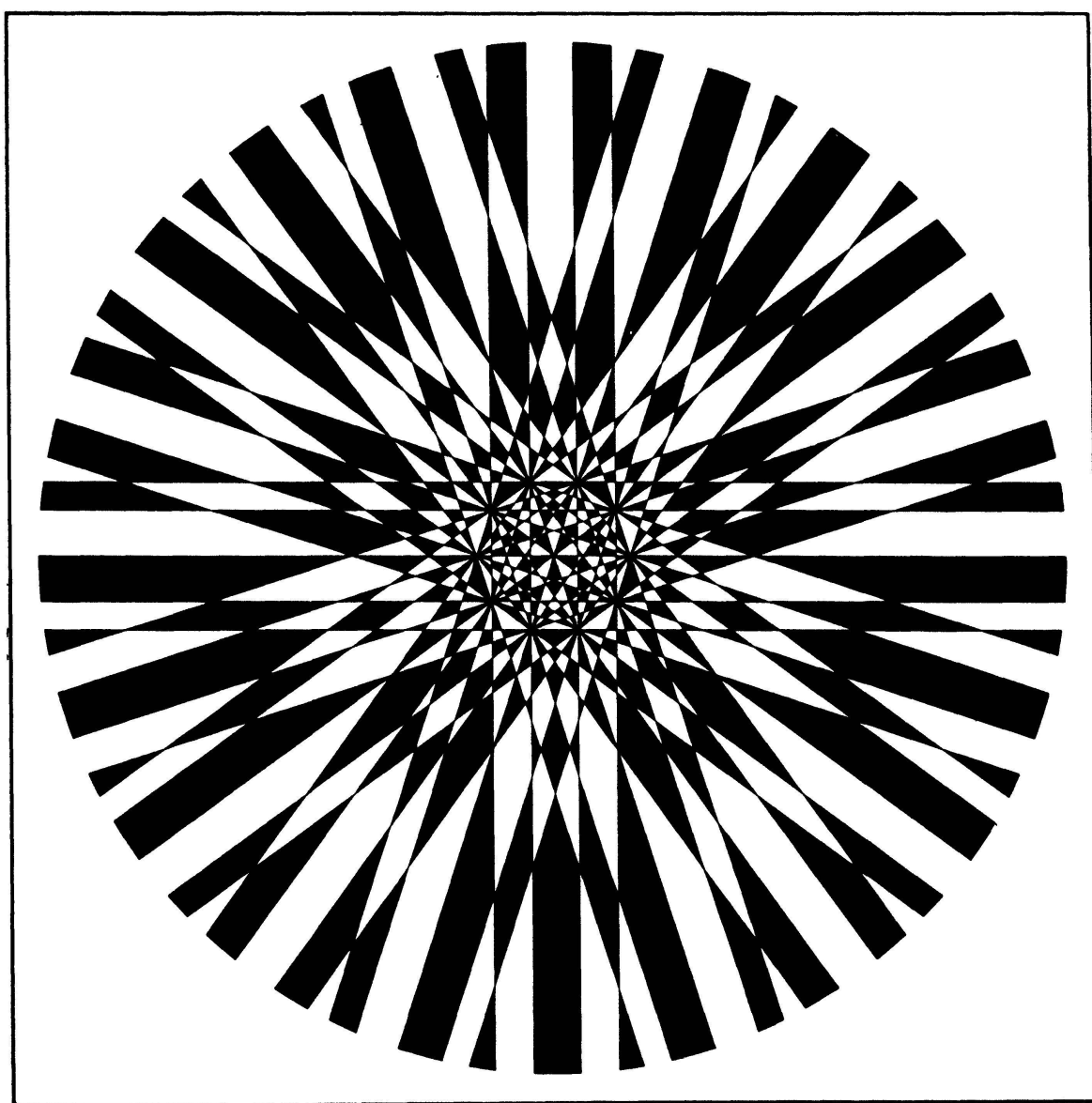


Fig. 1

Das regelmässige, vollständige Zehneck.

Die Figur 1 zeigt das regelmässige, vollständige Zehneck. Man erkennt die Ecken des Zehnecks als die Schnittpunkte der beiden leicht ersichtlichen Fünfecke (weiss und schwarz). Die 45 Verbindungsgeraden der zehne Ecken als Grundpunkte bilden das vollständige Zehneck. Von den $m = 620$ Maschen (330 Dreiecke, 240 Vierecke und

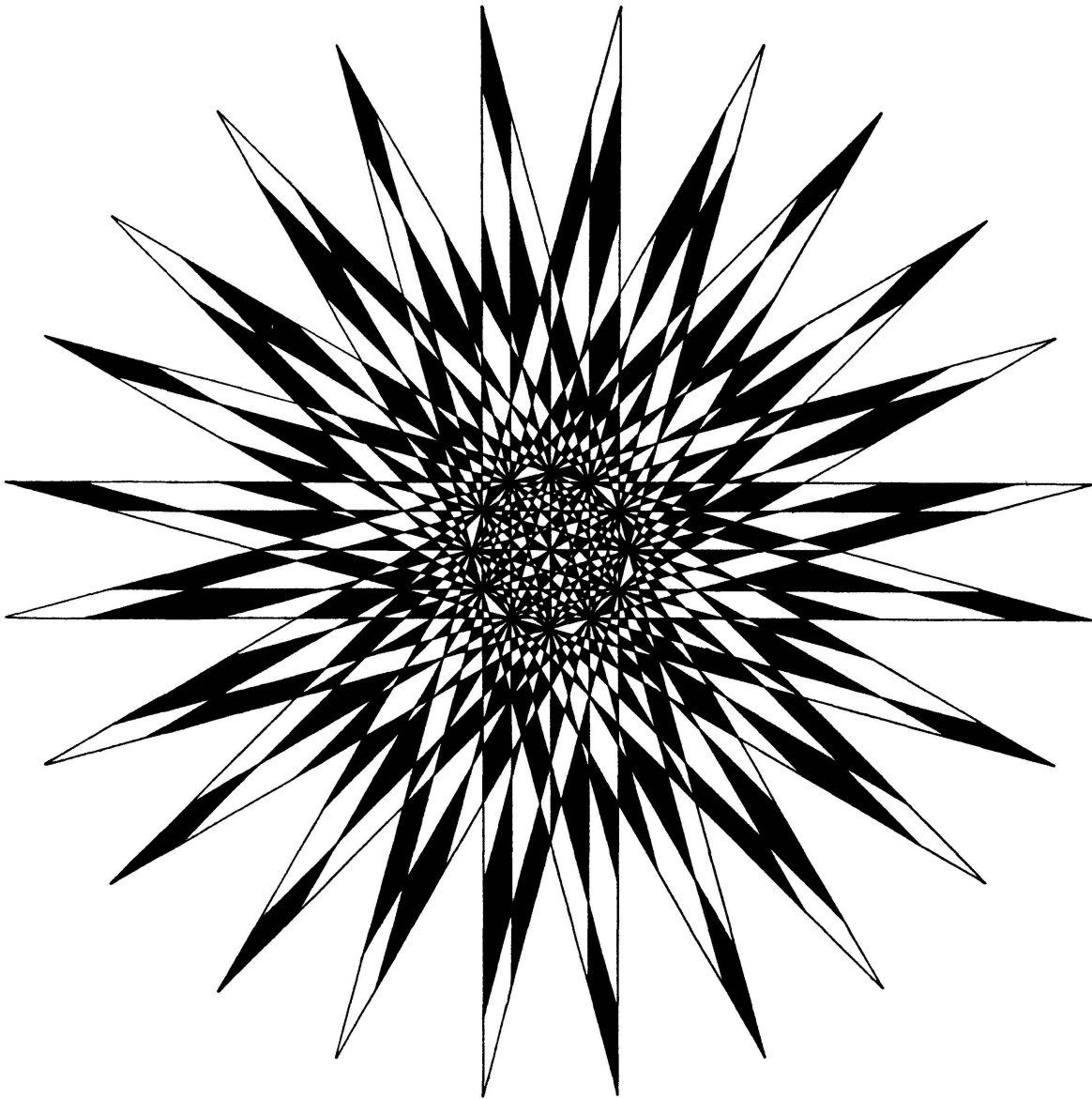


Fig. 2

50 Fünfecke) reichen 10 Vierecke und 60 Dreiecke bis zur Ferngeraden, während 10 Vierecke sich über diese erstrecken. Die Figur besteht aus $p = 481$ Punkten (die 10 unendlichfernen eingeschlossen) und $s = m + p - 1 = 1100$ Maschenseiten.

Die Figur 2 zeigt das regelmässige vollständige Zwölfeck, wobei aber die Seiten nur bis zu den im Endlichen liegenden Schnittpunkten gezogen sind. Die Figur enthält $p = 901$ Punkte, $m = 1152$ Maschen (624 Dreiecke und 528 Vierecke) und

$s = m + p - 1 = 2052$ Maschenseiten. (Für die vollständige Figur mit den 12 unendlichfernen Punkten gilt $p = 913$, $m = 1272$, $s = 2184$ ¹.)

Die Figur 3 zeigt einige der konzentrischen Kreise, welche Punkte von Figur 2 enthalten. Es ist eine reizvolle, ganz elementare Aufgabe, den Beziehungen zwischen den Radien nachzugehen.

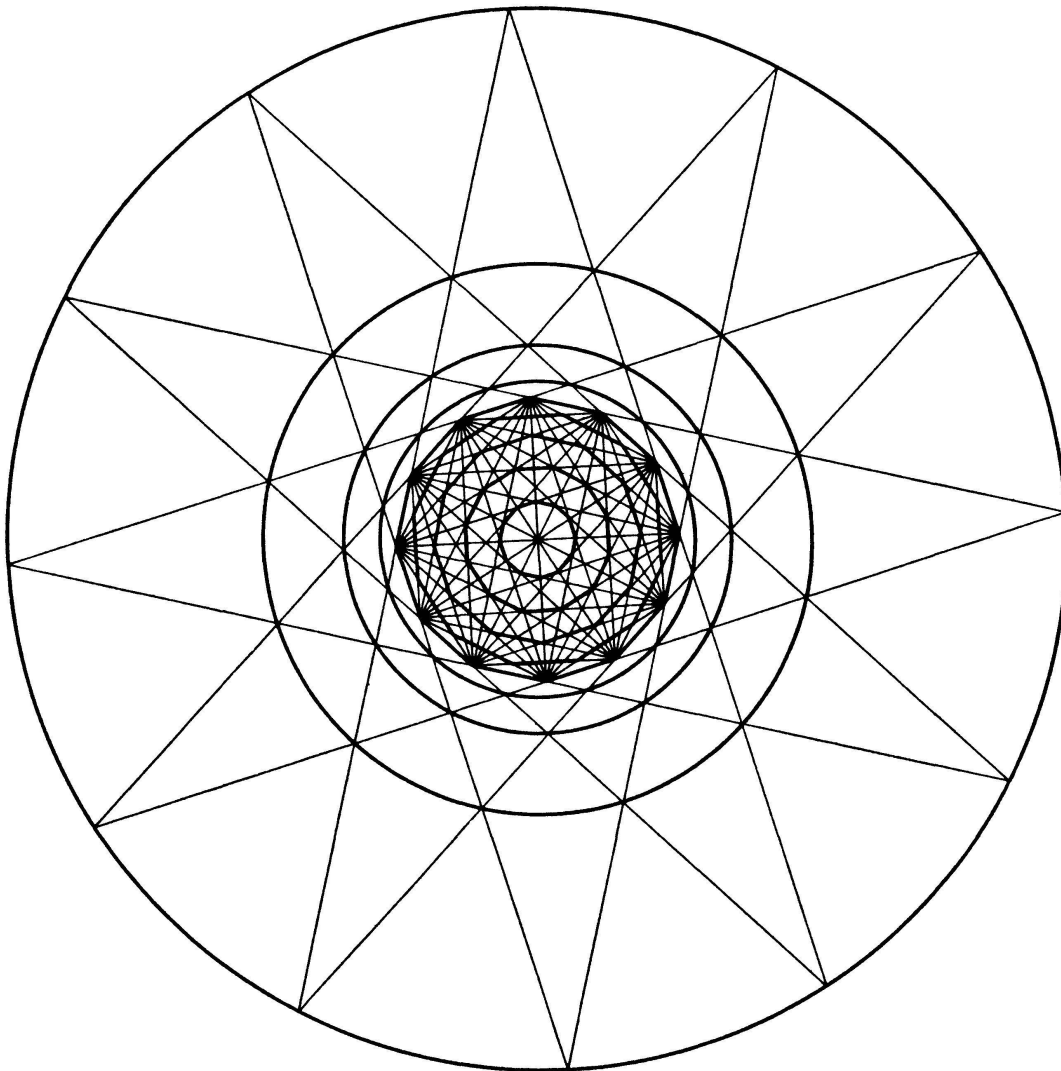


Fig.3

Der vollständige Würfel

Als Vorbereitung zur nächsten Figur betrachten wir zuerst eine einfachere Konfiguration: die *Konfiguration von REYE* oder den *vollständigen Würfel*. Nimmt man zu den 8 Würfecken die drei Fernpunkte (Schnittpunkte von je vier parallelen Kanten) und den Mittelpunkt, als weitere Elemente der Figur die 6 Würfelflächen und die 6 Diagonalebene, als Geraden die 12 Kanten und 4 Würfeldiagonalen, so ergibt sich eine in sich polare Konfiguration von 12 Punkten, 12 Ebenen und 16 Geraden.

¹) Die Figuren 1 und 2 sind der Publikation L. LOCHER-ERNST, *Mathematische Meditationen* (Brahe-Verlag, Winterthur 1943), entnommen.

Jede dieser 16 Geraden ist mit 3 Punkten und 3 Ebenen inzident. —

Durch jeden der 12 Punkte gehen 4 Geraden und 6 Ebenen. —

In jeder der 12 Ebenen liegen 4 Geraden und 6 Punkte. —

Von den metrischen Verhältnissen abgesehen, sind alle 12 Punkte, alle 12 Ebenen sowie die 16 Geraden je unter sich gleichbedeutend. Zum Beispiel kann jeder der 12 Punkte als «Mittelpunkt» eines «Würfels» betrachtet werden. Es ist interessant, sich die gegenseitige Lage dieser zwölf Würfel klarzumachen. Der gewöhnliche Würfel gibt somit durch seine Struktur den Anlass, den *vollständigen Würfel* zu betrachten, der zwölf einfache projektive Würfel enthält.

Zur genau gleichen Konfiguration gelangt man durch das polare Verfahren, angewendet auf das Oktaeder¹⁾.

Das vollständige Dodekaeder (oder das vollständige Ikosaeder)

Die Figur 4 soll dazu dienen, sich dieses Gebilde möglichst anschaulich aufbauen zu können. Es besteht aus

60 Punkten, 60 Ebenen und 72 Geraden.

Durch jeden der 60 Punkte gehen 6 Geraden und 15 Ebenen. —

In jeder der 60 Ebenen liegen 6 Geraden und 15 Punkte. —

Jede der 72 Geraden ist mit 5 Punkten und 5 Ebenen inzident. —

Wir führen zunächst die folgenden Bezeichnungen ein: Unter den *Nebenecken eines Ikosaeders* (I-Nebenecken) verstehen wir die 20 Punkte, in denen sich je drei Ikosaederkanten treffen. Sie bilden die Ecken eines gewöhnlichen Dodekaeders und auch diejenigen eines zwanzigeckigen Sterndodekaeders, dessen Scheiben (Pentagramme) wir die *Nebenflächen des Ikosaeders* (I-Nebenflächen) nennen. Es sind dies die Ebenen, welche durch je ein Kantenfünfeck des Ikosaeders bestimmt sind. (Die von diesen Kantenfünfecken begrenzten Scheiben bilden die Flächen eines sterneckigen Dodekaeders.)

Unter den *Nebenflächen eines Dodekaeders* (D-Nebenflächen) verstehen wir die 20 Ebenen, in denen je drei Dodekaederkanten liegen. Sie bilden die Flächen eines gewöhnlichen Ikosaeders und auch diejenigen eines Sternikosaeders, dessen Ecken wir die *Nebenecken des Dodekaeders* (D-Nebenecken) nennen. Es sind dies die Punkte, in denen sich je fünf Kanten des Dodekaeders treffen. (Diese Punkte stellen auch die Ecken eines zwölf-eckigen Sterndodekaeders dar, sowie — selbstverständlich — die Ecken eines Ikosaeders.)

Nun betrachte man in der Figur 4 das innerste Ikosaeder. Zu dessen 12 Ecken nehmen wir den Mittelpunkt und seine 20 Nebenecken (die Ecken des kräftig ange deuteten Dodekaeders) und die 15 Schnittpunkte paralleler Ikosaederkanten hinzu, ferner die 12 Nebenecken (die äussersten Punkte der Zeichnung) des soeben genannten Dodekaeders.

Als Ebenen der Figur gelten die 20 Flächen des Ikosaeders, dessen 15 Diagonalebenen (Verbindungsebenen von je zwei parallelen Kanten) und dessen 12 Nebenflächen, ferner die 12 Flächen des Dodekaeders und die Fernebene.

¹⁾ Über den vollständigen Würfel und andere Konfigurationen findet man nähere Angaben in dem Buche von H. HERRMANN, *Übungen zur projektiven Geometrie* (Birkhäuser, Basel 1952) [besprochen in *El. Math.* 8, 46 (1953)].

Ausgehend vom Dodekaeder erhält man die Figur folgendermassen: Zu dessen 12 Ebenen nehmen wir die Fernebene und seine 20 Nebenflächen (die Flächen, welche das Ikosaeder innen bilden) und die 15 Verbindungsebenen paralleler Dodekaederkanten hinzu, ferner die 12 Nebenflächen des inneren Ikosaeders.

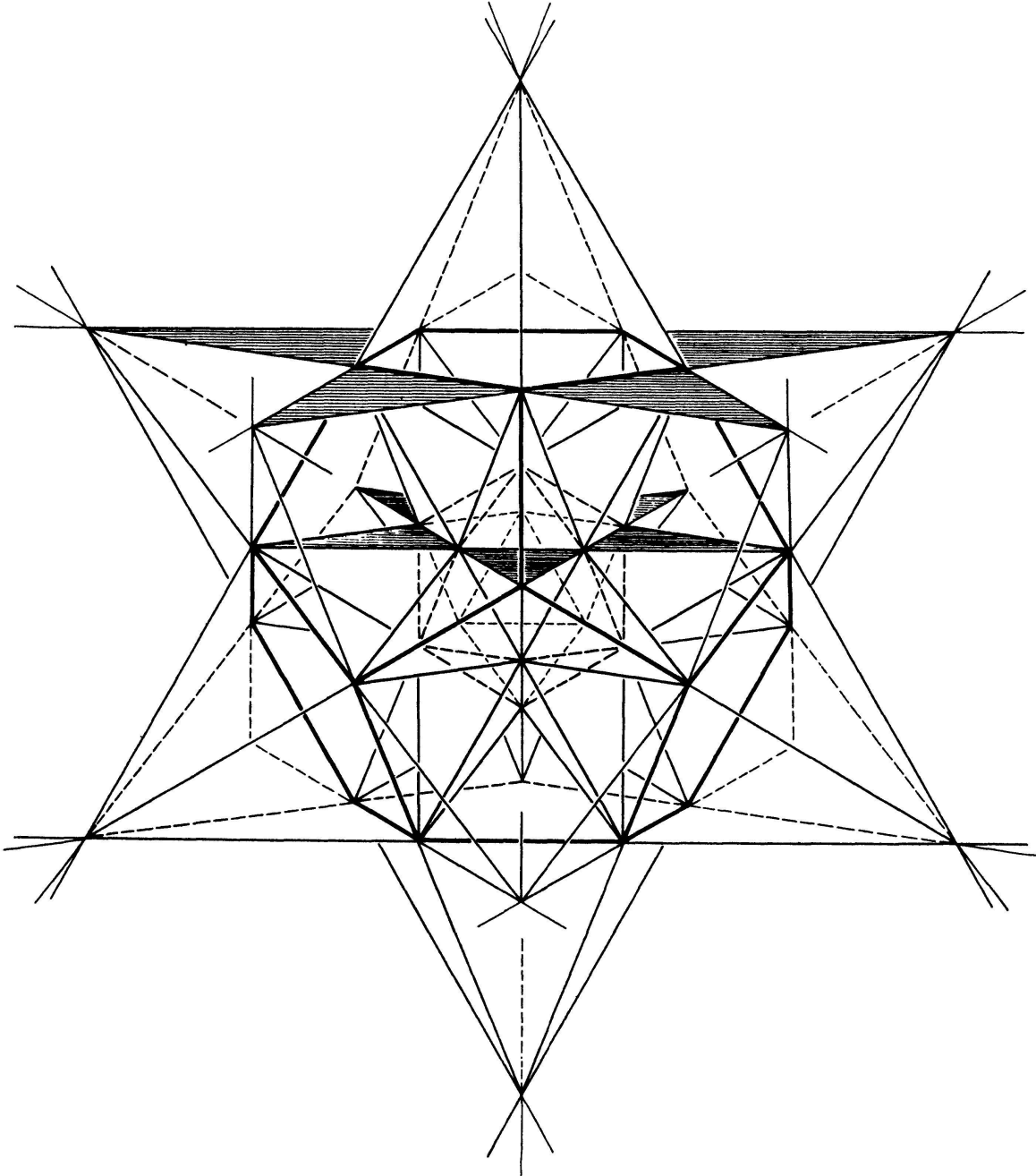


Fig. 4

Das vollständige Dodekaeder.

Als Punkte der Figur gelten die 20 Ecken des Dodekaeders, dessen 15 Fernpunkte (Schnittpunkte von je zwei parallelen Kanten) und dessen 12 Nebenecken, ferner die 12 Ecken des Ikosaeders und der Mittelpunkt.

Als Geraden der Figur gelten die 30 Kanten des Dodekaeders, die 30 Kanten des Ikosaeders, die 6 Ferngeraden des Dodekaeders (Schnittgeraden paralleler

Dodekaederflächen) und die 6 Durchmesser des Ikosaeders (Verbindungsgeraden diametraler Ikosaederecken).

Von den metrischen Verhältnissen abgesehen, sind alle 60 Punkte, alle 60 Ebenen sowie die 72 Geraden je unter sich gleichbedeutend. Zum Beispiel kann also jeder der 60 Punkte als «Mittelpunkt» eines projektiven Dodekaeders oder Ikosaeders betrachtet werden. Die Konfiguration enthält somit 60 einfache projektive Dodekaeder, 60 einfache projektive Ikosaeder und von jeder der vier Sorten einfacher Sternkörper deren je 60.

Um sich die Gleichberechtigung der einzelnen Elemente leichter klarzumachen, ist die folgende Zusammenstellung nützlich. (Unter «Dodekaeder» und «Ikosaeder» sind dabei die einfachen Körper zu verstehen, von denen wir ausgingen.)

Eine Dodekaederfläche enthält: 5 D-Ecken, 5 D-Nebenecken, 5 Fernpunkte.

Eine Ikosaederfläche enthält: 3 I-Ecken, 6 D-Ecken, 3 D-Nebenecken, 3 Fernpunkte.

Eine Diagonalebene enthält: 4 I-Ecken, 4 D-Ecken, 4 D-Nebenecken, 2 Fernpunkte und den Mittelpunkt.

Die Fernebene enthält: 15 Fernpunkte.

Eine I-Nebenfläche enthält: 5 I-Ecken, 5 D-Ecken, 5 Fernpunkte.

Polar hierzu erhält man die Verhältnisse für die 60 Punkte der Figur.

In einer D-Kante liegen: 2 D-Ecken, 2 D-Nebenecken, 1 Fernpunkt.

In einer I-Kante liegen: 2 I-Ecken, 2 D-Ecken, 1 Fernpunkt.

In einem Durchmesser liegen: 2 I-Ecken, 2 D-Nebenecken, der Mittelpunkt.

In einer Ferngeraden liegen fünf Fernpunkte der Figur. –

Durch eine I-Kante gehen: 2 I-Flächen, 2 I-Nebenflächen, 1 Diagonalebene.

Durch eine D-Kante gehen: 2 D-Flächen, 2 I-Flächen, 1 Diagonalebene.

Durch eine Ferngerade gehen: 2 D-Flächen, 2 I-Nebenflächen, die Fernebene.

Durch einen Durchmesser gehen fünf Diagonalebenen. –

Je vier beliebige aufeinanderfolgende Punkte A, B, C, D auf einer der 72 Geraden haben das Doppelverhältnis

$$(ABCD) = \frac{1}{2} (\sqrt{5} + 1).$$

Es lohnt die Mühe, sich mit dem Aufbau der Konfiguration, die zu den schönsten Gebilden des Raumes gehört, im einzelnen vertraut zu machen.

L. LOCHER-ERNST, Winterthur.

Über die Verwendung der Polygoninhalte an Stelle eines Spiegelungsaxioms in der Axiomatik der Planimetrie¹⁾

In der Erörterung der Euklidischen Begründung der Flächeninhaltslehre hat HILBERT darauf hingewiesen, dass die Anwendung des Prinzips «das Ganze ist grösser als der Teil» eine Heranziehung der Anschauung involviert, die axiomatisch nicht selbstverständlich ist. Nämlich es wird ja hierbei vorausgesetzt, dass die Polygoninhalte eine Art von Grössen bilden, die sich bei der Zusammensetzung der Polygone

¹⁾ Ausarbeitung eines Vortrages, gehalten auf der Pfingsttagung 1952 am Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach.