

Einfall und Überlegung in der Mathematik

Autor(en): **Waerden, B.L. van der**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **8 (1953)**

Heft 6

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-16924>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer*

El. Math. Band VIII Nr. 6 Seiten 121–144 Basel, 15. November 1953

Einfall und Überlegung in der Mathematik¹⁾

Antrittsrede, gehalten am 2. Februar 1952 an der Universität Zürich

Von B. L. VAN DER WAERDEN, Zürich

Zur Lösung eines mathematischen Problems ist zweierlei notwendig: Überlegung und Einfall.

Unter Überlegung verstehe ich hier nur *bewusstes Denken*, mit Einschluss von solchen Überlegungen, die jederzeit bewusst gemacht werden können. Ob das Denken streng logisch oder analogiemässig oder mehr anschaulich ist, spielt dabei keine Rolle.

Ein Einfall dagegen fällt uns eben ein, wir wissen nicht woher. Er kommt nicht aus dem Bewusstsein, er kommt auch nicht durch die Sinne von aussen. Irgendwoher muss der Einfall aber stammen, also sagen wir: er kommt aus dem *Unbewussten*.

Ein guter Einfall hat immer etwas *Mysteriöses* an sich; man ist geneigt, ihn göttlich zu nennen. GAUSS hatte jahrelang versucht, einen zahlentheoretischen Satz zu beweisen. Er schreibt:

«Endlich vor ein paar Tagen ist's gelungen – aber nicht meinem mühsamen Suchen, sondern bloss durch die Gnade Gottes, möchte ich sagen. Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Rätsel gelöst; ich selbst wäre nicht imstande, den leitenden Faden zwischen dem, was ich vorher wusste, dem, womit ich die letzten Versuche gemacht hatte – und dem, wodurch es gelang, nachzuweisen²⁾».

HADAMARD berichtet ähnlich³⁾:

«Als ich durch einen Lärm draussen jäh aus dem Schläfe geweckt wurde, fiel mir auf einmal eine seit langem gesuchte Lösung ein, ohne Überlegung meinerseits und in einer Richtung ganz verschieden von allen den Richtungen, in denen ich früher gesucht hatte. Das Erlebnis war ganz eigenartig und mir unvergesslich.»

POINCARÉ hatte in einer schlaflosen Nacht die «Fuchsschen Funktionen» entdeckt. Nachher gelang es ihm, sie als Quotienten von zwei Reihen darzustellen. Er schreibt darüber⁴⁾:

«Die Idee war vollkommen bewusst und wohlüberlegt. Die Analogie mit den elliptischen Funktionen leitete mich. Ich fragte mich, welche Eigenschaften diese Funktionen haben müssten, wenn es sie gibt, und es gelang mir ohne Mühe, die Reihen zu bilden, die ich dann ‚séries thêtafuchsiennes‘ genannt habe.»

¹⁾ 1. Mitteilung.

²⁾ Brief an OLBERS. In: *Gauss' Werke*, Bd. X, 1, S. 25.

³⁾ J. HADAMARD, *Psychology of Invention in the Mathematical Field* (Princeton 1949), S. 8.

⁴⁾ J. HADAMARD, l. c., S. 13.

Nun kommt der Einfall:

«Auf einer geologischen Exkursion vergass ich zunächst meine mathematische Arbeit. In Coutances stiegen wir in einen Omnibus. In dem Augenblick, da ich meinen Fuss auf das Trittbrett setzte, kam mir die Idee, ohne dass irgend etwas in meinen früheren Gedanken diese Idee vorbereitet hatte, dass die Transformationen, die ich gebraucht hatte, um die Fuchsschen Funktionen zu bilden, identisch waren mit denen der nichteuklidischen Geometrie. Ich verifizierte die Idee nicht, dazu hätte ich auch keine Zeit gehabt, denn nach dem Einsteigen setzte ich ein schon angefangenes Gespräch fort, aber ich hatte das Gefühl einer vollkommenen Sicherheit. Nach meiner Rückkehr verifizierte ich das Ergebnis in aller Ruhe.»

Auch andere Wissenschaftler wissen über solche Fälle plötzlicher Erleuchtung zu berichten. POINCARÉ nennt sie ein deutliches Zeichen einer langen unbewussten Vorarbeit. «Die Rolle der unbewussten Arbeit in der mathematischen Erfindung scheint mir unbestreitbar», schreibt er.

HADAMARD versucht in einem sehr interessanten Buch *Psychology of Invention in the Mathematical Field* die Arbeitsweise des Unbewussten näher zu bestimmen. Er geht davon aus, dass Erfindung nur durch Kombination von Vorstellungen möglich ist. Es gibt aber viele Kombinationen; davon sind nur wenige fruchtbar. Das Unbewusste muss also zunächst viele mögliche Kombinationen bilden und dann daraus die fruchtbaren aussondern, denn nur diese werden uns als Einfälle bewusst.

HADAMARD stützt sich auf POINCARÉ. Dieser berichtet über die schlaflose Nacht, in der er die ersten Fuchsschen Funktionen konstruierte:

«Ich hatte schwarzen Kaffee getrunken und konnte nicht schlafen. Vorstellungen kamen mir haufenweise. Ich merkte, wie sie zusammenstiessen, bis einzelne Paare sich sozusagen einhängten, um eine stabile Verbindung einzugehen. Es kommt einem in solchen Fällen vor, als ob man bei seiner eigenen unbewussten Arbeit anwesend ist. Die unbewusste Arbeit macht sich dem übererregten Bewusstsein teilweise bemerkbar, ohne jedoch ihren eigenen Charakter zu verlieren. Bei solchen Gelegenheiten ahnt man den Unterschied in den Mechanismen der beiden Egos.»

Diese Fähigkeit POINCARÉS, das eigene unbewusste Denken bewusst zu beobachten, steht ziemlich vereinzelt da. Andere Wissenschaftler haben wohl blitzartige Einfälle, wissen aber nicht, wie sie zustande kommen.

POINCARÉ und HADAMARD haben im Anschluss an diese Selbstbeobachtung den eigentümlichen Mechanismus des unbewussten Denkens näher analysiert. Beide betonen besonders die Rolle des Schönheitsempfindens bei der Auswahl der fruchtbaren Kombinationen. Aber über die Rolle der bewussten Überlegung sagt HADAMARD fast nichts.

Wie weit reicht die bewusste Überlegung? Wie grenzt man sie ab gegen den Einfall? Darüber muss man doch mehr sagen können. Das bewusste Denken ist uns doch zugänglich: wir können es beobachten und damit experimentieren.

PÓLYA hat in einem wunderbaren Buch mit dem Titel *How to Find it?* die Überlegungen, die der Mathematiker beim Lösen eines Problems anstellt, sich klarzumachen versucht. Er formuliert die allgemeinen Gesetze der Überlegung als Fragen, die man sich immer wieder stellt. Jeder Student, jeder Forscher, besonders jeder Lehrer sollte das Buch lesen. Es enthält viele ganz elementare Beispiele, eingekleidet als Frage- und Antwortspiel. PÓLYA zeigt, wie der Lehrer den Schüler zum Selbst-Finden

anregen kann, und zwar nur durch allgemeine Fragen, die sich bei fast jedem Problem stellen lassen. Es sind dieselben Fragen, die auch der erfahrene Mathematiker sich immer wieder stellt, aber nie sind sie so präzise und doch allgemeingültig formuliert worden.

Das erste, was man tut, wenn man an ein Problem herantritt, ist: *sich das Problem klarmachen*. Man fragt: Was ist gegeben? Was wird gesucht? Welche Bedingung hat das Gesuchte zu erfüllen? Man zeichnet, wenn möglich, eine Figur. Man führt eine passende Bezeichnung ein. Man zerlegt die gestellte Bedingung in Teile; man schreibt die Teilbedingungen möglichst übersichtlich auf.

Sodann gilt es, *einen Plan zu entwerfen*. Man sucht eine Beziehung zwischen dem Gegebenen und dem Gesuchten. Man zerlegt die Voraussetzung in Teile. Man fragt: kann man aus dem Gegebenen oder aus den einzelnen Teilen des Gegebenen etwas Nützliches ableiten?

Noch fruchtbarer ist es in den meisten Fällen, vom Gesuchten auszugehen. Das ist das Verfahren der *Analyse*, das PAPPUS bereits sehr klar geschildert hat. «Man nehme das Gesuchte an», sagt PAPPUS, «als ob es schon verwirklicht wäre. Daraus ziehe man Schlüsse und weitere Schlüsse, so lange, bis man beim Gegebenen anlangt. Schliesslich versuche man, die Schlüsse umzukehren und so vom Gegebenen zum Gesuchten zu kommen.»

Wird nicht eine Konstruktion, sondern ein Beweis verlangt, so sucht man oft mit Vorteil einen *indirekten Beweis*. Man nimmt an, die Behauptung sei falsch, man zieht auch noch das Gegebene heran, und man schliesst so lange weiter, bis man auf einen Widerspruch kommt. Oft gelingt es nachher, den Beweis direkt zu führen, aber zu finden ist der indirekte Beweis manchmal leichter, weil man dabei mehr voraussetzen kann, nämlich das Gegebene und die Falschheit des Behaupteten. Von beiden Seiten aus schliessend, hat man eine Chance, sich in der Mitte zu treffen.

Sehr fördernd ist auch die *Analogie*. Man sucht ein verwandtes oder ähnliches Problem und fragt: Kann man die Methode benutzen, oder kann man das Ergebnis benutzen?

Eine sehr nützliche Frage ist: Schau auf die Unbekannte! Kennst du ein Problem mit derselben oder einer ähnlichen Unbekannten?

Gelingt das alles nicht, so wird man das Problem anders formulieren, ein äquivalentes Problem finden. Insbesondere wird man auf die Definitionen zurückgehen. Die Definition der Parabel erweckt in unserem Geist ganz andere Vorstellungen als das Wort Parabel. Die anderen Vorstellungen, die so in Bewegung gesetzt werden, sind vielleicht gerade die richtigen, die zur Lösung führen.

Sodann kann man das Problem variieren. Man sucht ein bescheideneres, ein spezielleres Problem. Oder man sucht ein allgemeineres Problem, das das aufgegebene als Spezialfall enthält. Man kann das Gegebene variieren oder das Gesuchte variieren. Man kann zunächst einen Teil des Problems lösen, einen Teil der Bedingung befriedigen.

Führt das alles nicht zum Ziel, so muss man Zwischenglieder suchen. Meistens geht man dabei vom Ende aus. Man sagt sich: wenn ich dieses hätte, so könnte ich auch das Problem lösen. Man stellt sich also ein Hilfsproblem, man zieht eine Hilfslinie oder man nimmt einen Hilfssatz zunächst einmal als richtig an.

Hat man einmal einen Plan, so können bei der *Durchführung des Planes* neue Probleme entstehen. Die einzelnen Schritte müssen wirklich durchgeführt, das vorläufig

Angenommene muss sauber bewiesen werden. Für diese neuen Probleme gilt dasselbe wie für das ursprüngliche Problem.

Hat man die vollständige Lösung eines Problems gefunden, so wird der Schüler meistens erleichtert die Feder aus der Hand legen. Der erfahrene Mathematiker aber wird immer eine *Nachbetrachtung* anstellen. Er fragt sich: Was ist wesentlich an der Methode? Kann ich es kürzer machen? Kann ich dieselbe Methode für weitere Probleme benützen? Oder kann ich das Ergebnis weiter verwerten?

Dem geschulten Mathematiker wird das alles vielleicht trivial vorkommen. So hat er es ja immer gemacht! Aber es bleibt doch verwunderlich, dass das alles sich allgemein und doch präzise sagen lässt.

Man könnte schliesslich einwenden: «Ja, aber ohne Einfall nützt das alles nichts!»

Der Einwand ist berechtigt, aber mir scheint doch, dass die bewusste Überlegung den Einfall vorbereitet. Das bewusste Denken setzt die Vorstellungen in der richtigen Weise in Bewegung; es steckt ein Ziel und gibt die Richtung an. Wenn das Problem richtig angesetzt ist und man die richtigen Analogien zu bereits gelösten Problemen heranzieht, so genügt oft ein ganz kleiner Einfall.

Als Beispiel betrachten wir einmal die berühmteste Entdeckung des ARCHIMEDES: den Inhalt und die Oberfläche der Kugel. ARCHIMEDES hat bewiesen, dass die Kugel dem Inhalt nach gleich zwei Dritteln des umschriebenen Zylinders ist und dass ihre Oberfläche gleich viermal der Fläche eines Grosskreises ist. Ein Relief der Kugel und des Zylinders ist auf seinen eigenen Wunsch in seinen Grabstein gemeißelt. ARCHIMEDES selbst betrachtete also diese Entdeckung als besonders wichtig und schön.

Wie ARCHIMEDES diese Sätze gefunden hat, darüber haben wir zum Glück einen Bericht aus seiner eigenen Feder in der Abhandlung *Ephodos*, das heisst Methode¹).

Zuerst fand ARCHIMEDES den Kugelinhalt. Nun suchte er, die Oberfläche zu bestimmen. Er liess sich, wie er selbst sagt, von der Analogie mit dem Kreise leiten. «Kennst du ein verwandtes Problem?» so lautet eine der regelmässig wiederkehrenden Fragen bei PÓLYA, und die Analogie zwischen Kreis und Kugel lag für ARCHIMEDES wirklich auf der Hand. Die Kreisfläche, das wusste ARCHIMEDES schon, ist gleich der Fläche eines Dreiecks, dessen Basis gleich dem Kreisumfang und dessen Höhe gleich dem Kreisradius ist. Ebenso wird nun, so überlegte er sich, die Kugel denselben Inhalt haben wie ein Kegel, dessen Basisfläche gleich der Kugeloberfläche und dessen Höhe gleich dem Kugelradius ist. Ausserdem wusste er bereits, dass die Kugel gleich zwei Dritteln des umschriebenen Zylinders ist, also viermal so gross wie ein Kegel, dessen Höhe der Radius und dessen Basisfläche ein Grosskreis ist. Also schloss er, dass die Kugeloberfläche viermal so gross ist wie ein solcher Grosskreis. Ein Beweis ist das nicht, das wusste ARCHIMEDES ganz genau, aber es gab ihm doch die Überzeugung von der Richtigkeit des Ergebnisses. Und das ist sehr viel wert, «denn wenn man einmal eine gewisse Kenntnis des Gesuchten erworben hat», so schreibt er selbst, «so ist es viel leichter, den Beweis zu führen, als wenn man noch nichts davon weiss.»

Aber wie fand ARCHIMEDES den Kugelinhalt? Wieder durch Analogie mit einem schon gelösten Problem. In derselben Abhandlung *Ephodos* erzählt ARCHIMEDES uns nämlich, wie er durch eine mechanische Methode den Flächeninhalt eines Parabelsegmentes gefunden hat.

¹) Übersetzung und Kommentar von H. G. ZEUTHEN, *Bibl. Math.* [3] 7 (1906).

ARCHIMEDES denkt sich das Parabelsegment etwa aus einer dünnen Metallplatte ausgeschnitten und hängt es als Ganzes am Ende eines Hebelarmes auf. Er gibt die Überlegung in einer solchen Form, dass sie auch für schiefe Segmente gilt; in der heutigen Darstellung wollen wir aber, um die Anschaulichkeit zu erhöhen, das Parabelsegment symmetrisch mit vertikaler Achse annehmen und es an einen waagrechten Hebelarm aufhängen. Beide Hebelarme werden gleich der abschneidenden Strecke des Parabelsegmentes gemacht. An den andern Arm hängt man ein rechtwinkliges Dreieck auf, dessen Hypotenuse parallel der Parabeltangente ist, so dass ein kongruentes Parabelsegment gerade dem Dreieck einbeschrieben werden kann. Das Dreieck wird, im Gegensatz zum Segment, nicht am Ende des Hebelarmes aufgehängt, sondern es hängt am Hebelarm selbst mit der Spitze am äussersten Ende.

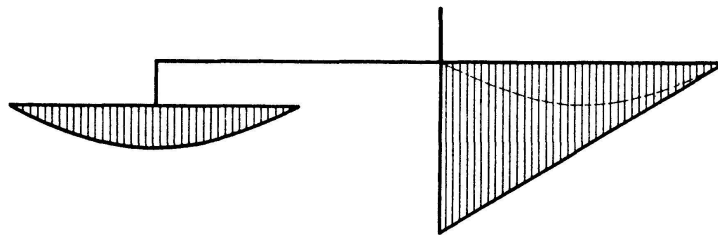


Fig. 1

Nun wird behauptet, dass das Parabelsegment mit dem Dreieck Gleichgewicht macht. Um das klarzumachen, wird das Segment durch senkrechte Geraden in dünne Streifen zerschnitten, so dünn, dass jeder Streifen als eine Strecke betrachtet werden darf. Ebenso wird das Dreieck in dünne Vertikalstreifen zerlegt, die als Strecken betrachtet werden. Jede dieser Strecken macht Gleichgewicht mit einer Strecke in der Parabel; das folgt sehr leicht aus der Gleichung der Parabel und aus dem Hebelgesetz, das ARCHIMEDES selbst entdeckt hat. Also, so schliesst er, muss das ganze Parabelstück, das ja aus allen den Strecken zusammengesetzt ist, Gleichgewicht machen mit dem ganzen Dreieck.

Andererseits kann man das Dreieck auch in seinem Schwerpunkt aufhängen; für die Wirkung auf den Hebel macht das nichts aus. Betrachtet man den Hebelarm als Höhe des Dreiecks, so liegt der Schwerpunkt auf einem Drittel der Höhe. Da nun der Hebelarm, an dem das Parabelsegment hängt, dreimal so lang ist wie der Hebelarm des Dreiecks bis zum Schwerpunkt, so muss das Gewicht des Metalldreiecks dreimal so gross sein wie das Gewicht des Parabelsegmentes, das heisst, die Fläche des Segmentes ist ein Drittel der Dreiecksfläche.

Ein Beweis ist das natürlich nicht, denn eine Fläche ist keine Summe von Strecken, aber überzeugend ist es wohl.

Dies hatte ARCHIMEDES also schon früher gefunden. Nun stellte er sich das Problem, den Inhalt der Kugel mit derselben Methode zu finden. Er dachte sich also die Vollkugel am Ende eines Hebelarms aufgehängt und fragte, was man am anderen Arm aufhängen muss, damit Gleichgewicht eintritt.

Schneidet man wieder die Vollkugel durch parallele Ebenen in kreisförmige Scheiben und nennt x den Abstand einer solchen Scheibe zu einem der beiden Pole, so ist der Flächeninhalt einer Scheibe proportional zu $x(d-x)$. Die moderne Bezeichnungweise verrät schon, dass es sich nur um einen Versuch von mir handelt, mich in

den Gedankengang des ARCHIMEDES hineinzusetzen, nicht um eine authentische Überlieferung.

Belastet man nun den anderen Arm im Abstand x mit einem Flächenstück proportional zu $(d - x)$, so bilden diese Flächenstücke zusammen einen Körper, der mit der Vollkugel Gleichgewicht macht. Man könnte den Körper etwa als dreiseitiges Prisma annehmen; die Situation wird dann genau so wie bei der Parabel. Um die Höhe des Prismas zu finden, müsste man aber zuerst die Quadratur des Kreises lösen, denn eine der rechteckigen Seitenflächen des Prismas muss viermal so gross sein wie ein Grosskreis der Kugel.

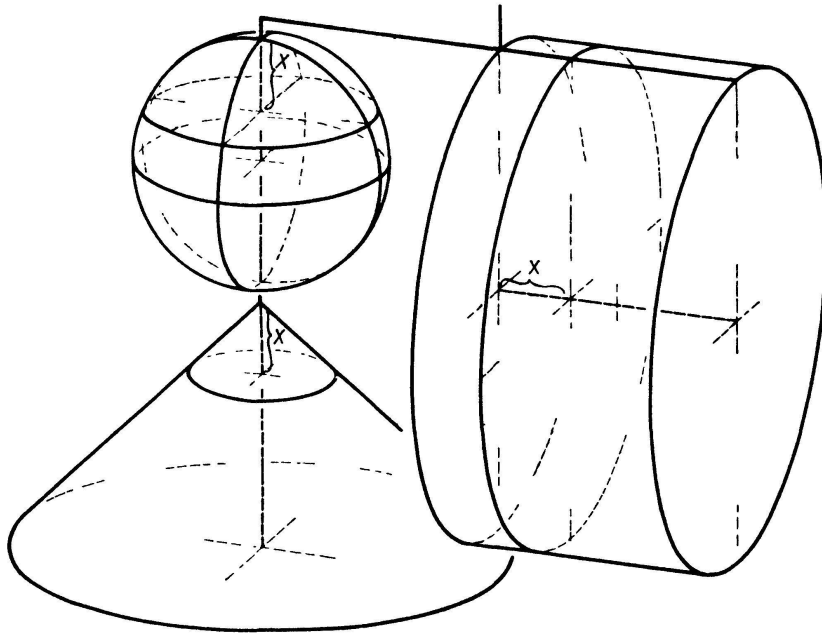


Fig. 2

So hätte ARCHIMEDES es also tun können. Er hat es aber nicht so getan, sondern er hat eine elegantere Lösung gewählt, bei der nur Rotationskörper verwendet werden. Er hängt an dem gleichen Hebelarm wie die Kugel noch einen Kegel auf, dessen Höhe gleich dem Kugeldurchmesser ist und dessen Basis denselben Durchmesser als Radius hat. Der Flächeninhalt eines Kreisschnittes im Abstand x von der Kegelspitze ist proportional zu x^2 . Addiert man das zum früheren $x(d - x)$, so erhält man nach einer ganz einfachen Rechenregel, die sogar ausdrücklich bei EUKLID steht, $x d$. Also macht die Summe der beiden Kreisscheiben, am Ende eines Hebelarmes von der Länge d aufgehängt, Gleichgewicht mit einer Kreisscheibe vom konstanten Radius d , aufgehängt im Abstände x vom Drehpunkt des Hebels. Diese Kreisscheiben bilden zusammen einen Zylinder mit der Höhe d , dessen Grundkreisradius ebenfalls gleich d ist. Hängt man also diesen Zylinder am anderen Hebelarm auf, so wie es in der Figur angegeben ist, so macht er Gleichgewicht mit der Kugel und dem Kegel zusammen.

Genau so verläuft, abgesehen von der Bezeichnung, die Argumentation des ARCHIMEDES. Man sieht also: Wenn man einmal den Grundgedanken der Hebelmethode hat, ist alles übrige durch die Analogie mit dem einfacheren Fall der Parabel leicht zu finden. Dass ARCHIMEDES den Kegel hinzunahm, um das quadratische Glied x^2 wegzuheben, war ein netter kleiner Einfall, aber unbedingt nötig war dieser Einfall nicht, denn mit dem Prisma wäre es auch gegangen.

Nachdem ARCHIMEDES so den Inhalt und die Oberfläche der Kugel gefunden hatte, entstand eine neue Frage, nämlich: Wie beweist man das alles?

Wiederum war es die Analogie mit dem Kreis, die ihn leitete. Die Kreisfläche hatte bereits EUDOXOS von aussen und von innen durch um- und einbeschriebene reguläre Polygone angenähert. EUDOXOS hatte bewiesen, dass die Fläche zwischen den beiden Polygonen beliebig klein gemacht werden kann, und daraus abgeleitet, dass die Kreisfläche proportional dem Quadrat auf dem Radius ist.

ARCHIMEDES denkt sich nun die Kugel durch Rotation des Kreises um einen Durchmesser entstanden. Er lässt ein um- und ein einbeschriebenes reguläres Polygon von gerader Seitenzahl ebenfalls um eine gemeinsame Diagonale rotieren und erhält so zwei Rotationskörper, die die Kugel zwischen sich einschliessen. Der eine Körper ist grösser als die Kugel, der andere kleiner, und die Differenz zwischen den beiden Rauminhalten kann beliebig klein gemacht werden. Das gleiche gilt für die Oberflächen. Nun handelt es sich bei den Oberflächen darum, zu beweisen, dass die vierfache Fläche eines Grosskreises ebenfalls kleiner ist als die äussere, aber grösser als die innere Rotationsfläche. Hat man das, so folgt nach bekannten Schlüssen, dass die Oberfläche der Kugel nicht kleiner und nicht grösser sein kann als die vierfache Kreisfläche. So wird das Problem erheblich vereinfacht: statt einer Gleichung für die unbekannte Kugeloberfläche hat man nur Ungleichungen zwischen bekannten Kreis- und Kegelflächen zu beweisen. Letzten Endes kommt alles auf den Beweis einer planimetrischen Ungleichung hinaus, die Summen von Sehnen in einem Kreis betrifft. Bei den Rauminhalten ist es etwas komplizierter, aber dieselbe Methode führt schliesslich auch hier zum Ziel.

Für die Zurückführung auf ein viel leichteres Problem ist kein einziger neuer Einfall nötig. Eine geniale Eingebung liegt dem Ganzen zugrunde: die Idee mit dem Hebel. Alles übrige ist in der Hauptsache systematisches bewusstes Denken, scharfsinniges und unermüdliches Verfolgen der einen grundlegenden Idee bis in die letzten Konsequenzen. In einem anschliessenden Aufsatz hoffe ich, dies alles näher auszuführen.

Authentische Berichte von Mathematikern über die Art, wie sie zu ihren Entdeckungen gekommen sind, sind sehr selten. Deshalb will ich jetzt über ein eigenes Erlebnis berichten.

Es ist manchmal schwer, in der Erinnerung Einfall und Überlegung scharf zu trennen. In dem besonderen Fall aber, den ich im Auge habe, wird die genaue Fixierung der angestellten Überlegungen in der Erinnerung dadurch erleichtert, dass sie alle ausgesprochen wurden. Wir waren zu dritt: ARTIN, SCHREIER und ich, und alle Überlegungen, die einer von uns anstellte, wurden sofort den andern mitgeteilt.

Wir diskutierten eine Vermutung von BAUDET über arithmetische Reihen von ganzen Zahlen. BAUDET hatte vermutet: Wenn man die Menge aller natürlichen Zahlen in zwei Klassen einteilt, so liegt in mindestens einer dieser Klassen eine arithmetische Progression von l Gliedern, wobei l beliebig gegeben sein kann. ARTIN hatte eine Idee; wir überlegten gemeinsam, wie weit sie führte. Da kamen wir auf einen toten Punkt und schauten die Kritzelzeichnungen an der Tafel einige Zeit schweigend an. Auf einmal hatte ich einen Einfall, begleitet von demselben Gefühl der vollkommenen Sicherheit, das in den Berichten von POINCARÉ und HADAMARD auch erwähnt wird. Ich sagte zu ARTIN und SCHREIER: «So geht es.»

Sie wollten es zuerst nicht glauben. Sie sagten: «Nun ja, in dem einfachsten Fall von nur zwei Klassen und einer dreigliedrigen arithmetischen Reihe, da geht es so, aber doch nicht allgemein.» Ich zeigte ihnen aber, dass im nächsthöheren Spezialfall derselbe Beweisgedanke zum Ziel führt. Da sahen sie auch, dass der Beweis gefunden war¹⁾.

Wenn ich nun nachträglich den Einfall genauer analysiere, so sehe ich, dass die bewussten Überlegungen, die wir zuerst gemeinsam, dann einzeln angestellt hatten, bevor der Einfall kam, ganz wesentlich waren. Sie führten bereits ganz nahe an die Lösung. Der Einfall war nur der Funken, der übersprang, nachdem die beiden Pole ganz nahe zusammengebracht waren.

Wie verhält sich nun der Einfall zur bewussten Überlegung?

Überlegung gibt es vor und nach dem Einfall. Was nach dem Einfall kommt, ist nicht mehr so wesentlich: es ist nur ein Ausarbeiten der bereits gefundenen Lösung oder, wie HINDEMITH es in seinem Vortrag über die musikalische Inspiration ausdrückt, ein Wiederfinden von dem, was man einmal blitzartig klar vor sich gesehen hat. Natürlich können bei diesem Ausarbeiten neue Probleme auftauchen; dann ist eben eine neue Vorbereitung und ein neuer Einfall nötig.

Die Hauptarbeit des bewussten Denkens findet vor dem Einfall statt. Der Einfall soll vorbereitet, soll provoziert werden. Dazu ist es vor allem nötig, das Problem richtig zu stellen und klarzumachen. Die Bedingungen zu formulieren, denen der Einfall zu genügen hat, den Vorstellungen eine Richtung zu geben, das ist die Aufgabe des bewussten Denkens.

Manchmal war die Richtung, in die man die Vorstellungen dirigiert hat, zu eng begrenzt. Man ist dann «verbohrt»: man findet die Lösung nicht, die etwas abseits liegt. In solchen Fällen muss man etwas warten, vorübergehend an etwas anderes denken, die Gedanken abschweifen lassen. Das vorbereitende Denken bleibt aber richtunggebend, wenn auch in weiteren Grenzen als anfangs, wo man sich scharf auf eine Blickrichtung konzentrierte.

Eines ist jedenfalls klar: die Elemente der Lösung sind alle in unserer Vorstellungswelt vorhanden; sonst könnten wir ja das Problem überhaupt nicht lösen. Man muss nur die richtige Kombination finden. Durch Analogie mit anderen Problemen und durch die Bedingungen und Gegebenheiten des Problems selbst geleitet, stöbert man herum in seinen bewussten und unbewussten Vorstellungen, bis die richtige Kombination zum Vorschein kommt.

Es ist wie beim Wiedererkennen, beim Erinnern eines Namens zum Beispiel. Zuerst muss man sich den Menschen richtig anschauen, dann gibt man dem Unbewussten den Auftrag, die Erinnerungsbilder an den Menschen und seinen Namen aus dem Archiv herauszusuchen.

Welche Rolle spielt nun dabei der Schönheitssinn, den POINCARÉ und HADAMARD so stark betonen? POINCARÉ stellt die Frage so: Wie soll das Unbewusste aus allen den vielen möglichen Kombinationen die richtigen, das heisst fruchtbaren, herausfinden?

¹⁾ Ich habe den vollständigen Beweis dann im *Nieuw Archief voor Wiskunde* 15, 212 (1926) dargestellt. A. CHINTSCHINE hat in seinem sehr schönen Büchlein *Drei Perlen der Zahlentheorie* die Geschichte des Problems so dargestellt, als ob ich die Lösung in Göttingen allein gefunden hätte, während ich sie schon vorher in Hamburg mit ARTIN und SCHREIER gemeinsam gefunden hatte. Auf die Überlegungen, die zur Lösung geführt haben, hoffe ich in einem besonderen Aufsatz zurückzukommen.

Seine Antwort lautet: durch den Schönheitssinn. Bevorzugt werden die Kombinationen, die uns gefallen.

Ich will die grosse Bedeutung des Schönheitsgefühls für unser Denken keineswegs leugnen. Was uns gefällt, interessiert uns am meisten, und was uns interessiert, wird vorzugsweise ins Bewusstsein geholt. Aber allein ausschlaggebend ist der ästhetische Sinn nicht. Sonst würden wir ja das Gefühl der Richtigkeit, der unmittelbaren Gewissheit nicht haben, das unsere Einfälle so oft begleitet. Es ist wie beim Wiedererkennen: nicht das schönste Gesicht, nicht der schönste Name sollen herausgeholt werden, sondern der richtige!

Gewiss, schöne und interessante Gesichter merkt man sich leichter, sie drängen sich dem Bewusstsein mehr auf, aber sie werden deswegen noch nicht dem Bewusstsein präsentiert mit dem Gefühl: ja, der ist es.

So ist es auch in der Mathematik. Schöne, symmetrische, elegante Vorstellungskombinationen haben mehr Chance, die richtigen zu sein; sie werden auch leichter aufgefunden, weil sie uns besser gefallen, aber das Gefühl der Sicherheit, das einen Einfall so oft begleitet, hat eine andere Quelle.

Es ist eine Erfahrungstatsache, dass es ein Gefühl der unmittelbaren Evidenz, der intuitiven Sicherheit gibt, in der Mathematik wie im Leben. Dieses Gefühl nun stammt aus dem Unbewussten. Wir sehen einen guten Bekannten und erkennen ihn *sofort* wieder. Das beruht nicht auf einer bewussten Vergleichung mit Erinnerungsbildern, denn diese werden uns gar nicht bewusst. In unser Bewusstsein tritt nur die Überzeugung: Der ist es. Diese Überzeugung muss aber letzten Endes auf einer Vergleichung mit Erinnerungsbildern beruhen. Also findet die Vergleichung im Unbewussten statt.

Das Unbewusste ist also imstande, nicht nur zu assoziieren und zu kombinieren, sondern auch zu *urteilen*. Das Unbewusste urteilt intuitiv, aber das Urteil ist unter günstigen Umständen ganz sicher. Wir wissen: Das ist er, ich habe ihn wiedererkannt.

Kehren wir nun zur mathematischen Erfindung zurück, so können wir zusammenfassend sagen: Das Unbewusste hat drei Richtlinien bei der Auswahl der brauchbaren Vorstellungskombinationen. Erstens wählt es vorzugsweise schöne Kombinationen. Zweitens tritt bei gewissen Begriffsverbindungen die Intuition der Richtigkeit, der Evidenz hinzu. Schliesslich hat das Unbewusste ja vom Bewusstsein einen Auftrag erhalten: die gewünschte Begriffskombination soll Bedingungen erfüllen, die das Bewusstsein gestellt hat. Durch bewusstes Denken habe ich mir klar gemacht: Wenn ich so etwas finden würde, dann wäre die Aufgabe gelöst. Das Unbewusste hat, wie ein gewissenhafter Archivar, etwas gefunden, das die Bedingungen erfüllt, also kann es das Gefundene getrost vorlegen und sagen: Das ist die Lösung.

Conchoid and Negative Circle

1.

In working out problems and constructions in the negative-Euclidean (polar-Euclidean) space determined by an 'absolute point' O functioning as point-at-infinity within, it is convenient to be able to relate this space in a standard way to the