Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Band: 9 (1954)

Heft: 1

Rubrik: Aufgaben

noch übertroffen. Wir konstruieren die Diagonale $AB = (\sqrt{11} - 0{,}9^2)\, r$ des gesuchten Quadrates (Figur 3). Dazu mögen C, D und E drei der Schnittpunkte des gegebenen Kreises mit einem konzentrischen rechtwinkligen Achsenkreuz bezeichnen, derart, dass EC ein Durchmesser ist. Wir verlängern diesen um $CF = r$, ebenso den Radius OD um $DG = 4\, r/5$ und erhalten als Schnittpunkt von CE mit der Mittelsenkrechten von FG den Diagonalendpunkt A. Den andern Endpunkt B finden wir, indem DE auf die Länge $DH = 3\, r$ verlängert und $CH = CB$ auf die Durchmessergerade CE abgetragen wird.

Zur Berechnung findet man einerseits das rechtwinklige Dreieck CDH mit der Hypotenuse $CH = r\sqrt{11}$, anderseits über AF als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete auf der gezeichneten Mittelsenkrechten liegt. C ist Fusspunkt der Höhe von der Länge $OG/2 = 9\, r/10$. Somit muss der Hypotenusenabschnitt CA nach dem Höhensatz $81\, r/100$ betragen.

Wir erwähnen noch, dass die in den beiden letzten Konstruktionen notwendigen (in den Abbildungen weggelassenen) Streckenteilungen mit Vorteil unter Ausnutzung der ohnehin notwendigen Linien und Teilpunkte gezeichnet werden, und dass sich bei günstiger Anordnung der Konstruktionsschritte weitere geometrographische Vereinfachungen erzielen lassen.

Die verwendeten Näherungswerte[1]) stammen vom ersten, Vereinfachungen in den Konstruktionen vom zweiten der Verfasser.

H. Riedwil (Biglen), H. Debrunner (Bern).

Aufgaben

Aufgabe 145. Es sei $n_1 < n_2 < \ldots$ eine unendliche Folge ganzer Zahlen, es sei $\overline{\lim} \log n_k / \log k = \infty$. Dann ist $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-n_k}$ transzendent. P. Erdös, London.

Solution: If $\overline{\lim}\, n_{k+1}/n_k = \infty$ then α is a Liouville number. Hence for the remainder of the proof we may assume that there is a c such that $n_{k+1} < c\, n_k$ for all k. Under this assumption we establish the following:

Lemma: Let

$$S_k = \left\{ \sum_{i=1}^{l} n_{k_i} \,\middle|\, l \leqq k \right\}$$

then for every $\varepsilon > 0$ there is an element s_{k+1} of S_{k+1} such that

$$|s_{k+1} - s_k| > s_{k+1}^{1-\varepsilon}$$

for every s_k in S_k and

$$s_{k+1} - s'_{k+1} > s_{k+1}^{1-\varepsilon}$$

for every s'_{k+1} in S_{k+1}, $s'_{k+1} < s_{k+1}$.

Proof: For every $\varepsilon_1 > 0$ there must exist an x such that the number of elements of S_{k+1} below x is less than x^{ε_1}. Hence there must exist a pair s'_k, s_k of successive elements of S_k such that

$$s'_k < s_k < x \quad \text{and} \quad s_k - s'_k > x^{1-\varepsilon_1}.$$

If we choose x so large that $x^{\varepsilon_1} > \max(c, 2)$ then there must also exist an n_l in S such that

$$x^{1-3\varepsilon_1} < n_l < x^{1-2\varepsilon_1}.$$

[1]) Weitere gefundene Approximationen sind

$$\frac{1}{5}\sqrt{11 + 4\sqrt{285}}, \quad \frac{\sqrt{1018}}{18}, \quad \frac{2}{7}\left(11 - \sqrt{23}\right).$$

Consider now the elements of S_{k+1} which lie between s'_k and $s'_k + n_l$. Since $n_l > x^{1-3\varepsilon_1}$ there must be two successive elements s'_{k+1}, s_{k+1} of S_{k+1} such that

$$s'_k \leqq s'_{k+1} < s_{k+1} \leqq s_k + n_l \quad \text{and} \quad s_{k+1} - s'_{k+1} > x^{1-3\varepsilon_1-\varepsilon_1} > s_{k+1}^{1-4\varepsilon_1}.$$

Since we also have

$$s_k - s_{k+1} \geqq s_k - s'_k - n_l > x^{1-\varepsilon_1} - x^{1-2\varepsilon_1} > x^{1-2\varepsilon_1} > s_{k+1}^{1-2\varepsilon_1}$$

our lemma is proved if we set $\varepsilon = \varepsilon_1/4$.

We now can complete the proof of the theorem. Assume that α satisfies the equation

$$f(\alpha) = c_0 \alpha^m + c_1 \alpha^{m-1} + \cdots + c_{m-1}\alpha + c_m = 0$$

where the c_i are integers and $c_0 > 0$. Let s_m, s'_m be defined as in the lemma with $m = k+1$. Then

$$2^{s'_m} f(\alpha) = \text{integer} + \sum_{n=s_m}^{\infty} [c_0 N_m(n) + c_1 N_{m-1}(n) + \cdots + c_{m-1} N_1(n)]\, 2^{-n+s'_m}$$

where $N_k(n)$ is the number of ways of representing n as the sum of k elements of $\{n_k\}$. Hence $N_k(n) < n^k$ and

$$D = \left| \sum_{n=s_m}^{\infty} [c_0 N_m(n) + \cdots + c_{m-1} N_1(n)]\, 2^{-n+s'_m} \right| < K \sum_{n=s_m}^{\infty} n^m\, 2^{-n+s'_m}$$

$$< K \sum_{n=s_m-s'_m}^{\infty} n^{m/(1-\varepsilon)}\, 2^{-n} < 1$$

for sufficiently large s_m. On the other hand

$$D \geqq c_0 \sum_{n=s_m}^{\infty} N_m(n)\, 2^{-n+s'_m} - \left| \sum_{n=s_{m-1}}^{\infty} [c_1 N_{m-1}(n) + \cdots + c_{m-1} N_1(n)]\, 2^{-n+s'_m} \right|$$

$$> 2^{-s_m+s'_m} - K \sum_{n=s_{m-1}}^{\infty} n^m\, 2^{-n+s'_m}$$

where s_{m-1} is defined as in the proof of the lemma. Since $s_{m-1} > s_m + s_m^{1-\varepsilon}$ we have

$$K \sum_{n=s_{m-1}}^{\infty} n^m\, 2^{-n+s'_m} < 2^{-s_m+s'_m} K \sum_{n=s_m}^{\infty} n^{m(/1-\varepsilon)}\, 2^{-n^{1-\varepsilon}} < 2^{-s_m+s'_m}$$

for sufficiently large s_m. Hence $0 < D < 1$, a contradiction.

P. Erdös and E. G. Straus, Los Angeles.

Aufgabe 171. D'un navire A se déplaçant d'un mouvement rectiligne uniforme sur une droite a, on observe un autre navire B se déplaçant aussi d'un mouvement rectiligne uniforme sur une droite b coplanaire avec a.

De certains points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de la trajectoire de A, on observe B selon des lignes de visée qui forment avec la route de A des angles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Les seules données sont donc les distances $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, etc. ainsi que les angles α_1, α_2, etc.

D'une part, on demande de construire:

1° Le point O où les deux trajectoires a et b se coupent.
2° Le point A_0 où se trouve A lorsque B se trouve en O.
3° Le point B_0 où se trouve B lorsque A se trouve en O.
4° L'angle φ des deux trajectoires.
5° Le rapport des vitesses des deux navires.

D'autre part, pour pouvoir répondre à chacune des questions précédentes, quel est le nombre nécessaire et suffisant de visées qu'il faut faire ?

Ch. Roth, Genève.

Lösung: Ordnet man die Punkte von a und b einander derart zu, dass man die jeweils im gleichen Zeitpunkt erreichten Orte von A und B sich entsprechen lässt, so sind die Punktreihen a und b wegen der Gleichförmigkeit der Schiffsbewegungen ähnlich aufeinander bezogen, und die erwähnten Visierlinien umhüllen eine Parabel, die natürlich auch von a (und b) berührt wird. Zur Festlegung dieser Parabel benötigt man neben a noch *drei* Visierlinien (als Tangenten). A_0 ist dann Berührungspunkt der Parabeltangente a und kann durch Anwendung des Brianchonschen Satzes konstruiert werden. Da die Visierlinien als Parabeltangenten aus zwei *beliebigen* Tangenten *stets* ähnliche Punktreihen ausschneiden,reichen die genannten Angaben der Strecken A_1A_2, $A_2A_3, \ldots$ bzw. der Winkel α_1, $\alpha_2, \ldots$ zur Beantwortung der Fragen 1°, 3°, 4° und 5° nicht aus, das heisst, die geometrische Festlegung noch so vieler Visierlinien reicht zur eindeutigen Angabe des Schiffsweges b nicht aus, vielmehr ist eine einparametrige Mannigfaltigkeit für b möglich. A. UNTERBERGER, Bludenz.

Weitere Lösungen sandten R. LAUFFER (Graz) und R. NÜSCHELER (Bern).

Aufgabe 172. Eine beliebige multiplikative Gruppe $\mathfrak{G}$ werde (wie bei einem Körper, aber allgemeiner) durch ein einziges neues Element O erweitert. Auf wie viele Weisen kann man die Multiplikation von O mit sich und den Elementen von $\mathfrak{G}$ definieren, so dass das assoziative Gesetz bestehen bleibt? Wann ist das erweiterte System wieder eine Gruppe? A. SPEISER, Basel, und A. BAGER, Hjørring (Dänemark).

Lösung: E sei das Einselement von $\mathfrak{G}$. Wir setzen $O E = a$, $O O = b$. Liegt a in $\mathfrak{G}$, so folgt aus dem Assoziativgesetz für alle x in $\mathfrak{G}$: $O x = O\,(E x) = (O E)\, x = a x$. Für $a = O$ ist dagegen $O x = O$ für alle x in $\mathfrak{G}$, denn würde $O x$ in $\mathfrak{G}$ liegen, so wäre auch $O E = O\,(x x^{-1}) = (O x)\, x^{-1}$ in $\mathfrak{G}$. Nun sind folgende vier Fälle möglich:

1. $a = O$, $b = O$.
2. $a = O$, b in $\mathfrak{G}$. Hier ist $O^3 = O O^2 = O b = O$, $O O^3 = O O = b = O^2 O^2 = b^2$, also $b^2 = b$ und $b = E$.
3. a in $\mathfrak{G}$, $b = O$. Aus $(O O)\, E = O E = a = O\,(O E) = O a = a^2$ folgt $a^2 = a$, also $a = E$.
4. a in $\mathfrak{G}$, b in $\mathfrak{G}$. Hier ist $(O O)\, E = b E = b = O\,(O E) = O a = a^2$, also $b = a^2$. Somit haben wir folgende Möglichkeiten:

$$\begin{array}{llcll}
O E = O, & O O = O, & & O O = O, & E O = O, \\
O E = O, & O O = E, & \text{oder} & O O = E, & E O = O, \\
O E = E, & O O = O, & & O O = O, & E O = E, \\
O E = a, & O O = a^2 \ (a \text{ in } \mathfrak{G}), & & O O = c^2, & E O = c \ (c \text{ in } \mathfrak{G}).
\end{array}$$

Durch Kombination der Fälle der ersten Gruppe mit denjenigen der zweiten Gruppe ergeben sich folgende acht Möglichkeiten:

$$\begin{array}{rlll}
\text{I.} & O E = O, & O O = O, & E O = O, \\
\text{II.} & O E = O, & O O = O, & E O = E, \\
\text{II*.} & O E = E, & O O = O, & E O = O, \\
\text{III.} & O E = O, & O O = E, & E O = O, \\
\text{IV.} & O E = E, & O O = O, & E O = E, \\
\text{V.} & O E = a, & O O = a^2, & E O = c \ (a, c \text{ in } \mathfrak{G},\ a^2 = c^2), \\
\text{VI.} & O E = a, & O O = E, & E O = O \ (a \text{ in } \mathfrak{G},\ a^2 = E), \\
\text{VI*.} & O E = O, & O O = E, & E O = c \ (c \text{ in } \mathfrak{G},\ c^2 = E).
\end{array}$$

Die Strukturen der Typen II*, VI* sind denjenigen der Typen II, VI im Sinne von BOURBAKI entgegengesetzt und können deshalb vernachlässigt werden. Wir erhalten nun folgende Kompositionsregeln, wo x ein Element von $\mathfrak{G}$ ist:

I. $O x = x O = O$.

II. $O x = O$, $x O = x$. Da $(E O)\, x = E x = x$, aber $E\,(O x) = E O = E$, besteht $\mathfrak{G}$ nur aus dem Element $x = E$.

III. $O\,x = x\,O = O$. Wegen $(O\,O)\,x = E\,x = x$ und $O\,(O\,x) = O\,O = E$ ist wieder $x = E$ das einzige Element von $\mathfrak{G}$.

IV. $O\,x = x\,O = x$.

V. $O\,x = a\,x$, $x\,O = x\,c$. Wegen $(E\,O)\,E = c\,E = c$ und $E\,(O\,E) = E\,a = a$ ist $a = c$.

VI. Wegen $(O\,E)\,O = a\,O = O$ und $O\,(E\,O) = O\,O = E$ wäre $O = E$, also ist dieser Fall unmöglich.

Zusammenfassend haben wir:

I. $\mathfrak{G}$ beliebig, $O\,x = x\,O = O\,O = O$,
II. $\mathfrak{G} = E$, $O\,E = O\,O = O$, $E\,O = E$,
II*. $\mathfrak{G} = E$, $E\,O = O\,O = O$, $O\,E = E$.
III. $\mathfrak{G} = E$. $E\,O = O\,E = O$, $O\,O = E$,
IV. $\mathfrak{G}$ beliebig, $O\,x = x\,O = x$, $O\,O = O$.
V. $\mathfrak{G}$ beliebig, a beliebig aus $\mathfrak{G}$, $O\,x = a\,x$, $x\,O = x\,a$, $O\,O = a^2$.

Man überzeugt sich leicht, dass mit diesen Definitionen der Multiplikation das assoziative Gesetz wirklich erfüllt ist. III ist die Gruppe der Ordnung 2. Die andern Systeme sind keine Gruppen. Bemerkenswert ist, dass O in IV die Rolle des Einselementes übernommen hat. A. BAGER, Hjørring (Dänemark).

Neue Aufgaben

198. Soit π_i un plan passant par l'arête $A_{i-1}A_i$ d'un polygone plan $(A_0 A_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_n$, $A_n = A_0)$. Quelles sont les conditions à remplir pour que chaque plan π_i soit orthogonal au plan π_{i+1} $(i = 1, 2, \ldots, n)$? J.-P. SYDLER, Zurich.

199. Drei Punkte A, B, C, die sich mit gleichförmigen Geschwindigkeiten geradlinig bewegen, befinden sich in einem Zeitpunkt in A_1, B_1, C_1 und in einem andern Zeitpunkt in A_2, B_2, C_2. Man ermittle diejenige Lage, bei der die Fläche des Dreiecks ABC verschwindet oder möglichst klein wird. W. ZULLIGER, Küsnacht.

200. Zeige, dass das Volumen $V_n(d)$ einer Kugel in n Dimensionen und mit einem Durchmesser d gegeben ist durch

$$V_n(d) = \frac{d^n}{\Gamma^*(n+1)} \qquad \text{wo} \qquad \Gamma^*(n+1) = \prod_{k=2,4,6,\ldots} \left\{ \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^n}{1+\frac{n}{k}} \right\}.$$

[Wird das Produkt für $\Gamma^*(n+1)$ über *alle* natürlichen k erstreckt, so ergibt sich die bekannte Eulersche Formel für die Gamma-Funktion $\Gamma(n+1)$].

B. VAN DER POL, Genf.

201. Démontrer que les derniers chiffres décimaux des nombres de la suite infinie n^{n^n} $(n = 1, 2, \ldots)$ forment une suite périodique, et trouver sa période.

W. SIERPIŃSKI, Varsovie.

202. Bedeutet $\sigma_k(n)$ $(k \geqq 0)$ die Summe der k-ten Potenzen der Teiler der natürlichen Zahl n und $\varphi(n)$ die Anzahl der zu n primen $t \leqq n$ (Eulersche Funktion), so gilt die Ungleichung

$$\sigma_k(n) \geqq \sigma_0^k(n) + \varphi^k(n) \qquad (k \geqq 1,\ n > 1).$$

E. TROST, Zürich.

203. Soient α, β, γ les angles du triangle ABC, Z le centre de gravité et α', β', γ' les angles BZC, CZA, AZB. Démontrer

$$3 \operatorname{ctg}\alpha' = \operatorname{ctg}\alpha - 2\operatorname{ctg}\beta - 2\operatorname{ctg}\gamma$$

et par suite

$$\operatorname{ctg}\alpha' + \operatorname{ctg}\beta' + \operatorname{ctg}\gamma' = -(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma)$$

H. BREMEKAMP, Delft.