Entdecken oder Erfinden?

Autor(en): **Locher-Ernst, L.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **9 (1954)**

Heft 2

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-17355

ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare
Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

El. Math. Band IX Nr. 2 Seiten 25–48 Basel, 15. März 1954

Entdecken oder Erfinden?

Zum sechzigsten Geburtstag von PAUL FINSLER am 11. April 1954

Den Lesern dieser Zeitschrift ist bekannt, in welche Krise das Denken – noch nicht das mathematische Forschen selbst – zu Beginn unseres Jahrhunderts geriet, als es ein für allemal das Fundament der mathematischen Wissenschaften setzen wollte. Es genügt, die Entwicklung in einigen Strichen zu skizzieren.

Um das Eindringen von Irrtümern – indem entweder ein Begriff nicht stets im gleichen Umfange genommen wird oder Sprünge im logischen Schliessen unbemerkt passieren – mit Sicherheit zu vermeiden, wurden die Axiomatik der Arithmetik und das logische Schliessen selbst formalisiert. Die Begriffe und die Schlussweisen sind durch Zeichen ersetzt. (Dabei nimmt man an, dass die Identität mehrmals vorkommender «gleicher» Zeichen erkannt werden kann.) Die Axiome sind aus bestimmten Zeichen zusammengesetzte Figuren. Ein Beweis selbst ist, wie HILBERT gelegentlich sagte, «eine Figur, die anschaulich vorliegen muss». Eine Formel heisst beweisbar, wenn sie entweder ein Axiom ist oder die Endformel eines Beweises (durch Einsetzen und Schliessen gemäss den zugrunde gelegten Axiomen) darstellt.

Man wurde um so mehr auf diesen Weg gedrängt, als man gewisse Widersprüche in der Grundlegung der Mengenlehre nicht zu durchschauen vermochte.

Weiter stellte sich das Problem der Widerspruchsfreiheit des zugrunde gelegten Axiomensystems. Können zwei Formeln von der Art «A ist B» und «A ist nicht B» beide beweisbar sein? Ist dies der Fall, so ist das Axiomensystem nicht widerspruchsfrei. Wenn feststeht, dass dies unmöglich eintreten kann, so ist das Axiomensystem widerspruchsfrei. Es besteht die Möglichkeit, dass eine Formel im System von der Art «A ist B» die Eigenschaft hat, dass sie innerhalb des gewählten Formalismus weder beweisbar noch widerlegbar ist. Dann ist der Satz «A ist B» unentscheidbar; genauer: unentscheidbar bezüglich des gewählten Formalismus.

Zu Beginn des Jahrhunderts wurde von HILBERT ein Schritt vollzogen, durch den die offizielle Erkenntnistheorie der exakten Wissenschaften ihre Prägung erhielt. Bei der Schwierigkeit, die in den Axiomen auftretenden Grundbegriffe (zum Beispiel Punkt, Gerade) zu erklären, kam man auf den Weg der impliziten Definition: Die Grundbegriffe $x, y, \dots$ sollen solche Dinge darstellen, für die das aufgestellte

Axiomensystem gilt. $x, y, \ldots$ werden somit durch nichts anderes als durch die Axiome selbst definiert[1]).

Dieses Vorgehen in Verbindung mit der formalistischen Methode brachte Erfolge, die unerwartet waren. Es zeigte sich nämlich der folgende Tatbestand: Man habe für irgendeine Disziplin ein Axiomensystem aufgestellt, auf Grund dessen sich Sätze dieser Disziplin herleiten lassen, sofern unter den implizite definierten Grundbegriffen $x, y, \ldots$ diese und jene Dinge verstanden werden. Nun ist es möglich, dass für eine andere Disziplin genau dasselbe Axiomensystem anwendbar ist; nur haben die $x, y, \ldots$ einen anderen «Inhalt». So konnte man bekannte Sätze einer Disziplin bloss durch Umdeuten der darin vorkommenden Zeichen auf andere Gebiete übertragen und auf diese Weise Ergebnisse gewinnen, zu denen man direkt vielleicht nur mit Mühe gelangt wäre.

Diese Erfolge führten dazu, die formalen Strukturen verschiedener Disziplinen besonders ins Auge zu fassen und schliesslich in der Erforschung solcher Strukturen das charakteristische Merkmal der Mathematik unseres Jahrhunderts zu sehen.

KLEINS Erlanger Programm hatte diesen Weg vorbereitet. Jedoch hätte FELIX KLEIN, nach meiner Ansicht, den letzten Schritt niemals mitgemacht. Dazu war er zu sehr Mathematiker, der sich des genuinen Inhalts zum Beispiel der Liniengeometrie oder eines anderen Gebietes annahm, was nicht zu hindern braucht, sich an der Eleganz der formalen Übereinstimmung gewisser Strukturen zu interessieren.

Die Entwicklung formaler Systeme trug nicht wesentlich bei, das Hauptproblem, das zur Krisis führte, zu lösen, nämlich zur Beantwortung der Frage: Gibt es in der Mathematik Widersprüche?[2])

Beim Problem der Widerspruchsfreiheit eines Systems ist eine wichtige Unterscheidung vorzunehmen. Es ist gleichzeitig die Wegstelle, von der an die Geister sich trennen. Nicht eine Wegkreuzung; weil die einen im Formalen verbleiben wollen und die anderen darüber hinaus streben.

Angenommen, ein Axiomensystem liesse sich innerhalb eines bestimmten Formalismus als widerspruchsfrei dartun. Selbstverständlich ist es möglich, dass durch eine Änderung des Formalismus (zum Beispiel durch Abändern der als erlaubt angenommenen Schlussweisen) das Axiomensystem nicht mehr widerspruchsfrei ist. Ist aber durch den Beweis der Widerspruchsfreiheit *innerhalb* eines bestimmten Formalismus sichergestellt, dass das Axiomensystem *wirklich* widerspruchsfrei ist? Selbstverständlich kann es sich hier nicht um bloss formale Mechanismen handeln, sondern um formalisierte Systeme, deren Regeln eine begriffliche Bedeutung zukommt.

[1]) Das gilt heute als selbstverständliche Errungenschaft. Wer sich für die Entwicklung dieser Sache näher interessiert, greife zu dem Briefwechsel zwischen G. FREGE und D. HILBERT. Er gibt tiefe Einblicke in das Problem. HILBERT sah sich genötigt, den folgenden Satz zu schreiben: «Ich bin zu der Aufstellung meines Systems von Axiomen durch die Not gezwungen...» Siehe: *Ein unbekannter Brief von Gottlob Frege über Hilberts erste Vorlesung über die Grundlagen der Geometrie*, herausgegeben von M. STECK, Sitz.-Ber. Heidelberger Akad. Wiss. 1940. Ferner: *Unbekannte Briefe Freges über die Grundlagen der Geometrie und Antwortbrief Hilberts an Frege*, herausgegeben von M. STECK, Sitz.-Ber. Heidelberger Akad. Wiss. 1941.

[2]) In diesem Zusammenhange erwähne ich den folgenden Satz von A. FRAENKEL, dem bekannten Verfasser des ausgezeichneten Buches *Einleitung in die Mengenlehre* (Zitat aus der Abhandlung *Das Problem des Unendlichen in der neueren Mathematik*, Blätter dtsch. Philos. *4*, 291 [Verlag Junker & Dünnhaupt, Berlin 1930]): «Namentlich RUSSELL häufte systematisch derartige Widersprüche an, in der richtigen Erkenntnis, dass eine solche Sammlung das erschreckende Gefühl der Einzelerscheinung keineswegs vermehren, vielmehr mindern müsse und die Handhabe zu einer wesensmässigen und nicht bloss äusserlichen Aufklärung bieten könne.»

Der Formalist fragt sofort: Was heisst «wirklich»? Antwort: Wirklich widerspruchsfrei ist ein Axiomensystem, wenn durch logisches Denken kein Widerspruch aus ihm gefolgert werden kann. Unter dem logischen Denken ist eine rein geistige Tätigkeit verstanden, die nicht in formalisierter Form gegeben, auch nicht durch die Sprache vermittelt zu sein braucht, deren Inhalt somit reine Begriffe sind.

Es gibt heute viele Forscher, für welche die obige Frage ohne Sinn ist, weil sie «inhaltliches» Denken nicht anerkennen können. Für diejenigen, welche unter Denken mehr verstehen als *formales* Schliessen, entsteht aber die zweite Kardinalfrage: Ist ein formal widerspruchsfreies Axiomensystem unter allen Umständen auch inhaltlich – für das reine Denken – widerspruchsfrei?

Die Weiterverfolgung der formalistischen Richtung führte schliesslich zu einer Auffassung, die durch die folgenden zwei Zitate aus dem anregenden Buche von F. WAISMANN[1]) genügend charakterisiert wird: «Allein der Ausdruck ‚die Arithmetik begründen' gibt uns ein falsches Bild; weil es so aussieht, als ob ihr Gebäude auf gewissen Grundwahrheiten errichtet sei; während sie ein Kalkül ist, der nur von gewissen Festsetzungen ausgeht, aber frei schwebend ist wie das Sonnensystem und auf nichts ruht» (S. 95).

Über die Logik selbst: «Die Logik ist nur einer dieser Kalküle, an sich nicht wichtiger als die anderen» (S. 93).

Ob das betreffende logische oder mathematische Regelnsystem, ob der gewählte Kalkül ein blosses Spiel mit Zeichen sei oder mehr als das, wird davon abhängig gemacht, ob man den Kalkül anwenden, mit ihm etwas anstellen könne.

Bleibt man nicht auf halbem Wege stehen, sondern macht mit dieser Anschauung Ernst, so gelangt man zum Ergebnis, dass Mathematik und Logik reine Erfindungen sind. Kennzeichen der brauchbaren Erfindung ist die Anwendbarkeit. Und schliesslich ergibt sich als Antrieb zum Erfinden der Wille zur Machtentfaltung. Man setzt ein «zweckmässiges» Axiomensystem und untersucht, was sich daraus folgern lässt. Die mathematischen Institute werden so zu mehr oder weniger rationell ausgerüsteten Produktionsstätten von reinen «Gewissheits»-Fabrikaten, die in normalformatigen Magazinen den Konsumenten zur Verfügung stehen.

Die Verteilung der Primzahlen ist für diese Ansicht nicht etwas, was unabhängig von uns existiert, sondern eine blosse Folge aus geeignet erfundenen Axiomen und Schlussregeln. R. L. WILDER[2]) schliesst sein 1952 erschienenes Buch mit den Sätzen:

In short, mathematics is what we make it; not by each of us acting without due regard for what constitutes mathematics in our culture, but by seeking to build up new theories in the light of the old, and to solve outstanding problems generally recognized as valuable for the progress of mathematics as we know it. Until we make it, it fails to 'exist'. And, having been made, it may at some future time even fail to be 'mathematics' any longer.

Hier möge man sich der schönen Worte entsinnen, die an hohen und mittleren Schulen, in Artikeln und an Festanlässen, in Lehrplandiskussionen und pädagogischen Kursen über den Wert der Mathematik als allgemein bildendes Fach gesprochen worden und noch heute zu hören sind: über die Erziehung zum logischen Denken, über die Pflege der *richtigen* Ausdrucksweise, über die Liebe zur Wahrheit usw.

---

[1]) F. WAISMANN, *Einführung in das mathematische Denken*, 1. Auflage (Verlag Gerold & Co., Wien 1936).
[2]) R. L. WILDER, *Introduction to the Foundations of Mathematics* (John Wiley & Sons, New York 1952).

Man halte sich vor, was es bedeutet, wenn im mathematischen Unterricht die Schüler zum logischen, das heisst widerspruchsfreien Denken erzogen werden sollen, und der Lehrer insgeheim unsicher ist, ob vielleicht Widersprüche doch nicht vermieden werden können; wenn von der Schönheit der Wahrheitsforschung gesprochen wird und insgeheim doch nur Anwendbarkeit und Wille zur Macht dahinter stecken. Deshalb handelt es sich hier um eine für die Würde des gesamten mathematischen Unterrichts eminent wichtige Sache, der ein Lehrer sich nicht entziehen kann, wenn er seinen Beruf ernst nehmen will.

Wenn wir hier an der ideellen, von uns unabhängigen Existenz zum Beispiel der Primzahlgesetze festhalten, so schliesst das natürlich nicht aus, dass die jeweilige *Form* der Erforschung dieser Objekte im Laufe der Zeit ausserordentlich variieren kann.

Die eine Kardinalfrage «Gibt es in der Mathematik Widersprüche?» wurde von P. FINSLER klar beantwortet; er hat in seinen einschlägigen Arbeiten mit aller denkbaren Schärfe gezeigt, wie die sogenannten Antinomien durchschaut werden können. Wie und warum die oft behandelten sogenannten Widersprüche, in die sich das Denken verstricken kann, auftreten, lässt sich exakt zeigen. Meines Wissens konnten den Lösungen FINSLERS von keiner Seite Fehler nachgewiesen werden, und doch sind sie noch nicht zum selbstverständlichen Allgemeingut geworden.

Die zweite oben erwähnte Kardinalfrage hat in der Arbeit FINSLERS *Formale Beweise und die Entscheidbarkeit* 1926 ihre erstmalige Erledigung gefunden: In *jedem* Formalismus kann man Aussagen angeben, die innerhalb dieses Formalismus *sicher unentscheidbar*, also *formal widerspruchsfrei*, aber ihrem Inhalt nach *gedacht* falsch sind.

Damit werden Grenzen sichtbar, die jedem Formalismus von vornherein gesteckt sind.

Wir können hier nicht auf die ausserordentlich bedeutsamen weiteren Ergebnisse FINSLERS über die Frage, ob es absolut (nicht nur formal) unentscheidbare Sätze gibt, eingehen.

Neben anderen Leistungen hat PAUL FINSLER mit den genannten Ergebnissen für die Sinngebung des mathematischen Unterrichts etwas erreicht, was kaum hoch genug geschätzt werden kann: Es gelang ihm damit, einen Damm gegen den Nihilismus in der Mathematik zu errichten. Sein sechzigster Geburtstag gibt uns Anlass, dessen in unserer Zeitschrift dankbar zu gedenken.

Hat man sich die Finslerschen Erkenntnisse zu eigen gemacht, so findet man auch die Möglichkeit, im mathematischen Schaffen nicht bloss ein Erfinden, sondern ein Entdecken zu erkennen. Zugegeben, es ist nicht leicht, in das Gebiet der den mathematischen Ideen zugrunde liegenden Realität zu gelangen.

Es handelt sich nicht darum, den Formalismus zu unterschätzen, sondern richtig zu werten, wozu er fähig ist und was er seiner Natur nach nicht leisten kann. Meines Erachtens lassen sich auf Grund der genannten Ergebnisse die beiden Aspekte Entdecken und Erfinden durchaus vereinigen: Es geht in der Mathematik um das *Entdecken*; zu diesem Ziele können Formalismen *erfunden* werden, die dem Entdecken dienlich sind.

L. LOCHER-ERNST.

LITERATUR

Fünf wichtige Arbeiten von P. FINSLER zur Grundlagenfrage:

Gibt es Widersprüche in der Mathematik?, Jber. Dtsch. Math.-Ver. *34*, 143–155 (1926).

Formale Beweise und die Entscheidbarkeit, Math. Z. *25*, 676–682 (1926).

Über die Grundlegung der Mengenlehre, Math. Z. *25*, 683–713 (1926).

Gibt es unentscheidbare Sätze?, Comment. Math. Helv. *16*, 310–320 (1943/44).

Über die Berechtigung infinitesimalgeometrischer Betrachtungen, Convegno di Geometria Differenziale, 1953 (Edizioni Cremonese, Roma 1954).

Die Unendlichkeit der Zahlenreihe[1])

Es freut mich, hier in Ihrem Kreise sprechen zu können, in Basel mit seiner altehrwürdigen mathematischen Tradition, und über einen Gegenstand, der wohl auch innerhalb der Mathematik als altehrwürdig bezeichnet werden kann, nämlich über die natürlichen Zahlen.

Auch die Frage, ob es etwas Unendliches gibt, ist schon sehr alt; manche sagen ja, andere sagen nein, das gilt auch heute noch.

Versuche, die Unendlichkeit der Zahlenreihe zu beweisen, also zu zeigen, dass es zu jeder Zahl immer eine noch grössere Zahl gibt, sind im letzten Jahrhundert gemacht worden; ich nenne hier

BOLZANO	1851:	*Paradoxien des Unendlichen* (§ 13).
FREGE	1884:	*Die Grundlagen der Arithmetik* (§ 78ff.).
DEDEKIND	1887:	*Was sind und was sollen die Zahlen?* (§ 5).

Besonders die spätere Entwicklung der Mengenlehre hat dann aber gezeigt, dass diese Beweise nicht ausreichend sind.

DEDEKIND zum Beispiel gibt in seiner Schrift einen strengen Aufbau des Operierens mit den natürlichen Zahlen unter der Voraussetzung, dass es unendlich viele Dinge gibt. Für diese Voraussetzung gibt er aber eine Begründung, die man nicht als stichhaltig betrachten kann. DEDEKIND schliesst etwa so: Er betrachtet die Welt der denkbaren Dinge. Dazu gehört das eigene Ich und zu jedem Ding der Gedanke an dieses Ding. So erhält man also den Gedanken an das Ich, dann den Gedanken an den Gedanken an das Ich usf. und damit scheinbar eine unendliche Reihe von Gedanken. Aber doch nur scheinbar. Wenn man nämlich diese Reihe wirklich zu bilden versucht, dann sieht man, dass man diese Gedanken sehr bald schon nicht mehr voneinander unterscheiden kann, besonders, wenn man die natürlichen Zahlen noch nicht hat, mit denen man sie zählen könnte; und man sieht auch, dass man bald schon diese Gedanken nicht mehr weiter bilden kann. Die Reihe dieser Gedanken ist nicht unendlich.

Diese Überlegung zeigt nun aber auch, dass es nicht selbstverständlich ist, dass die Reihe der natürlichen Zahlen unendlich ist. Auch hier könnte es eine Stelle geben, wo man einfach nicht mehr weiterkommt. Wenn es tatsächlich nichts Unendliches gibt, dann ist auch die Zahlenreihe nicht unendlich.

[1]) Vortrag vor der Mathematischen Gesellschaft Basel, gehalten am 29. Juni 1953. – Es ist für unsere Zeitschrift eine Ehre, diesen bedeutenden Vortrag veröffentlichen zu dürfen. *Die Redaktion.*