Volumen und Oberfläche von Kreuzkern und Kugel

Autor(en): **Finsler, Anne**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **9 (1954)**

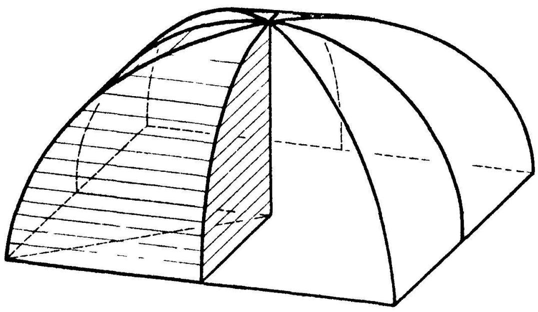
Heft 2

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-17357

Volumen und Oberfläche von Kreuzkern und Kugel[1])

Die Achsen zweier Kreiszylinder von gleichem Radius sollen sich senkrecht schneiden; der in beiden Zylindern zugleich enthaltene Raumteil heisse «Kreuzkern» (Figur 1). Obschon dieser konvexe Körper nur von krummen Flächen (Teilen der Zylindermäntel) und krummen Kanten (zwei Ellipsen) begrenzt ist, stehen doch sein



Figur 1
Obere Hälfte des Kreuzkerns mit ausgezeichnetem Achtel.

Volumen und seine Oberfläche in einfachem Verhältnis zu denen des umbeschriebenen Würfels. Diese bekannte Tatsache soll hier auf anschaulich-geometrische Weise hergeleitet werden. Im Anschluss daran ergibt sich noch das Volumen eines allgemeineren Körpers und das der Kugel sowie die Oberfläche der letzteren.

1.

Drei Ebenen, die Grundriss-, Aufriss- und Seitenebene, treffen sich senkrecht im Punkt O. Eine Strecke AB von der festen Länge a bewege sich parallel zur Seitenebene so, dass ihr Endpunkt A in der Aufriss- und B in der Grundrissebene bleiben (Figur 2). Wenn sich dann A in der Winkelhalbierenden zwischen Grundriss- und Seitenebene von O aus wegbewegt, so beschreibt B in der Grundrissebene einen Viertelkreis mit dem Radius a. Man kann nämlich die Strecke AB um ihre Grundrissprojektion CB wegen $CA = CO$ so umlegen, dass sie in den Radius OB übergeht; die Dreiecke ACB und OCB sind kongruent.

In der Ebene des rechtwinkligen Dreiecks ACB errichte man über dessen Seiten die Quadrate. Bei der erwähnten Bewegung von AB beschreiben diese Quadrate drei Körper, deren Volumina bestimmt werden sollen.

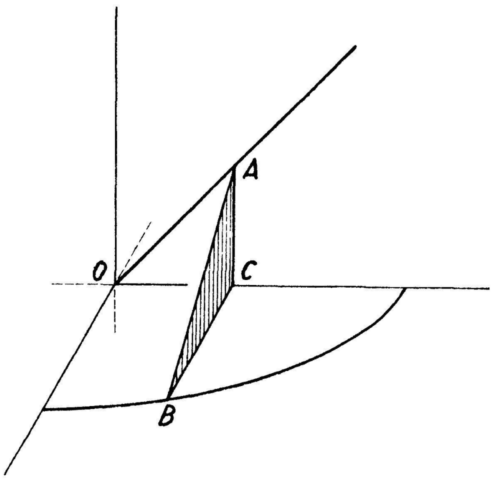
Nach dem Prinzip von CAVALIERI haben zwei Körper dasselbe Volumen, wenn sie von einer Schar paralleler Ebenen je in gleich grossen Flächen geschnitten werden. Das Quadrat über der Strecke AB beschreibt daher einen Körper, dessen Volumen gleich dem eines Würfels von der Seitenlänge a, also gleich a^3 ist.

[1]) Bemerkung der Redaktion: Es freut uns, für eine alte Sache hier einen neuartigen Beweisgang, den die Schwester des Mathematikers, P. FINSLER, gefunden hat, bekanntzugeben.

Das Quadrat über AC beschreibt eine Pyramide vom Volumen $a^3/3$, denn aus drei solchen Pyramiden lässt sich in bekannter Weise genau ein dem vorigen gleicher Würfel zusammensetzen.

Das Quadrat über BC beschreibt den Oktanten eines Kreuzkerns, denn die nicht an C anstossenden Seiten ergeben Zylinderflächen.

Aus dem schon erwähnten Prinzip von CAVALIERI folgt nun, dass der auf das Dreieck ABC angewendete Lehrsatz des PYTHAGORAS die Beziehung ergibt: Die beiden



Figur 2

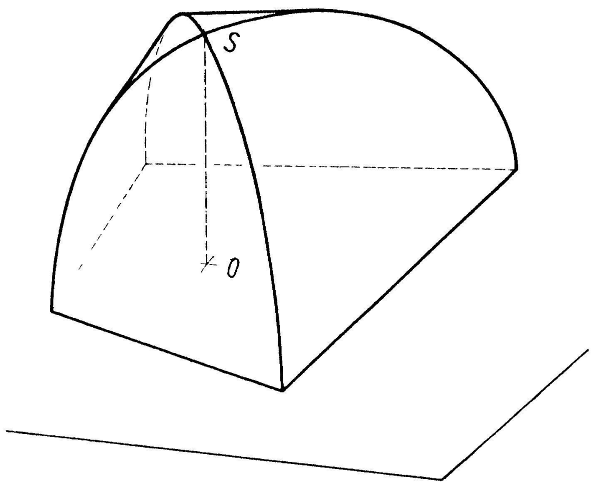
zuletzt genannten Körper haben zusammen dasselbe Volumen wie der erste. Für den Kreuzkernoktanten ergibt sich daher das Volumen $2a^3/3$.

Geht man von den Oktanten zu den entsprechenden vollen Körpern über, so erhält man das Ergebnis:

Das Volumen des Kreuzkerns beträgt zwei Drittel von dem des umbeschriebenen Würfels (von der Kantenlänge $2a$) und zugleich das Doppelte von dem des einbeschriebenen (nichtregulären) Oktaeders, dessen Ecken in die Scheitel der begrenzenden Ellipsen fallen.

Auch die *Oberfläche* des Kreuzkerns beträgt zwei Drittel von der des umbeschriebenen Würfels. Das kann man folgendermassen einsehen: Die Oberfläche eines ebenen oder krummen, glatten Flächenstücks wird erhalten, indem man in jedem Punkt desselben die Normale errichtet und darauf von der Fläche aus, immer auf derselben Seite der Fläche, ein Stück d abträgt. Der von allen diesen Normalenstücken überdeckte Teil des Raumes stellt eine auf der Fläche aufgetragene Schicht von der Dicke d dar. Das Volumen dieser Schicht durch d dividiert, gibt, wenn d sehr klein ist, genähert die Oberfläche des Flächenstücks; man erhält diese genau als Grenzwert, wenn d gegen Null geht.

Um nun die Oberfläche des Kreuzkerns zu erhalten, trägt man in allen Punkten der vier zylindrischen Flächenstücke, die denselben beranden, die Flächennormalen der Länge d auf, etwa überall nach aussen. In jedem Punkt einer Kante des Körpers (ausser in den beiden Schnittpunkten der Ellipsen) hat man zwei Normalen, entsprechend den beiden angrenzenden Flächenstücken. Die so erhaltenen vier Schichten sind enthalten in demjenigen Kreuzkern, der von den zwei Zylindern mit den früheren Achsen, aber dem Radius $a+d$ gebildet wird. Andererseits liegen sie ausserhalb des gegebenen Kreuzkerns, also in der zwischen den beiden Kreuzkernen liegenden Schicht, deren Volumen gleich der Differenz der Volumina der beiden Kreuzkerne ist. Die Volumina der vier auf den Begrenzungsflächen aufgetragenen Schichten sind aber, wenn d sehr klein ist, nur um weniges kleiner als die zwischen den beiden Kreuzkernen liegende Schicht: es kommt nämlich lediglich an den elliptischen Randkurven des Kreuzkerns noch etwas hinzu. Schlägt man um jeden Punkt dieser beiden Kurven ein Kugel vom Radius $d\sqrt{2}$, so erhält man zwei drahtartige Gebilde mit kreisförmigem Querschnitt, die den fehlenden Teil enthalten. Der Inhalt dieser beiden «Drähte» ist aber genähert gleich dem Produkt von Querschnitt und Länge der Drähte, also zusammen kleiner als $16\, l\, d^2$, wo l die Länge einer elliptischen



Figur 3

Randkurve bedeutet. Bei der Division durch d mit nachträglichem Grenzübergang zu $d = 0$ verschwindet diese kleine Korrektur, so dass man also die Oberfläche des Kreuzkerns erhält, indem man die Differenz der Volumina der beiden Kreuzkerne mit den Radien a und $a + d$ bildet, durch d dividiert und zur Grenze $d = 0$ übergeht.

Für die Differenz der Volumina der beiden Kreuzkerne gilt aber nach dem Früheren, dass sie gleich zwei Dritteln der Differenz der Volumina der beiden umbeschriebenen Würfel ist [mit den Kantenlängen $2\,a$ und $2\,(a + d)$]. Dividiert man diese letztere durch d und lässt dann d gegen Null gehen, so erhält man genau entsprechend (wie man hier sofort nachrechnen kann) die Oberfläche des Würfels mit der Kante $2\,a$. Damit ist aber gezeigt, dass, wie behauptet, auch die Oberflächen von Kreuzkern und umbeschriebenem Würfel sich wie $2:3$ verhalten müssen.

In unserem Falle erhalten wir $24\,a^2$ für den Würfel und $16\,a^2$ für den Kreuzkern. Die Oberfläche des einbeschriebenen Oktaeders beträgt jedoch $8\,a^2\sqrt{2}$, also mehr als die Hälfte von der des Kreuzkerns. Das rührt daher, dass einer Vergrösserung des Zylinderhalbmessers um d nur eine Schicht der Dicke $d/\sqrt{2}$ auf dem Oktaeder entspricht.

2.

O sei ein Punkt im Innern eines konvexen Polygons und OS eine zur Ebene dieses Polygons senkrechte Strecke von der Länge a (Figur 3). Der Punkt S werde mit den Ecken des Polygons durch Viertelsellipsen verbunden, derart, dass OS je eine

Halbachse der zugehörigen Ellipsen darstellt. Der kleinste konvexe Körper, welcher diese Figur enthält, werde als «Kuppel» bezeichnet; er hat das gegebene Polygon als Grundfläche und OS als Höhe. Die zur Grundfläche parallelen Schnitte sind zu ihr ähnliche Polygone.

Wenn die Grundfläche ein Quadrat mit der Seitenlänge $2a$ und dem Mittelpunkt O ist, so ist die Kuppel die Hälfte eines Kreuzkerns (Figur 1).

Bei zwei beliebigen Kuppeln von gleicher Höhe stehen die Flächeninhalte der Schnitte in gleichem Abstand von der Grundfläche in einem festen Verhältnis, nämlich in dem der Grundflächen. Daraus kann man schliessen, dass auch die Volumina der beiden Körper im selben Verhältnis stehen. Dies gilt nun ebenso für die einbeschriebenen Pyramiden, welche dieselben Grundflächen und Höhen besitzen. Es folgt, dass auch das Volumen der Kuppeln zu dem der einbeschriebenen Pyramiden in einem festen Verhältnis steht. Beim Kreuzkern ist aber dieses Verhältnis bekannt, da hier die Pyramide die Hälfte des obenerwähnten Oktaeders darstellt. Es gilt daher allgemein:

Das Volumen einer Kuppel ist das Doppelte von dem der einbeschriebenen Pyramide mit gleicher Grundfläche und Höhe.

3.

Die Grundfläche sei jetzt ein reguläres Polygon vom Radius a und dem Mittelpunkt O; die Ellipsenbogen werden zu Kreisbogen. Wenn die Seitenzahl des Polygons ins Unendliche wächst, so geht die Kuppel in eine Halbkugel, die einbeschriebene Pyramide in einen Kegel über. Es folgt also:

Das Volumen der Halbkugel ist das Doppelte von dem des einbeschriebenen Kegels mit gleicher Grundfläche und Höhe.

Bei der zu Anfang betrachteten Konstruktion kann man die Quadrate über den Seiten des Dreiecks ABC durch Kreise ersetzen, welche die Seiten als Radien und bei den Katheten C als Mittelpunkt besitzen. Der Kreis mit AB als Radius beschreibt einen Körper, dessen Volumen gleich dem eines Zylinders vom Radius und der Höhe a ist. Der Kreis mit CA als Radius beschreibt einen Kegel, der mit CB eine Halbkugel von gleicher Grundfläche und Höhe. Das Volumen dieser beiden Körper muss zusammen gleich dem des ersten, also gleich dem des Zylinders sein. Es ergibt sich somit das schon von ARCHIMEDES gefundene Resultat:

Die Volumina von Kegel, Halbkugel und Zylinder mit gleicher Grundfläche und Höhe verhalten sich wie 1:2:3.

Auch die *Oberflächen* der Kugel und des umbeschriebenen Rotationszylinders zusammen mit den beiden Deckkreisen verhalten sich wie 2:3. Die Oberfläche der Kugel vom Radius a erhält man nämlich, wenn man die Differenz der Volumina der Kugeln mit den Radien $a + d$ und a durch d dividiert und zur Grenze $d = 0$ übergeht. Dasselbe, für die umbeschriebenen Rotationszylinder gemacht, ergibt nach früheren Überlegungen die Oberfläche des Zylinders, welcher der Kugel vom Radius a umbeschrieben ist, zusammen mit den Deckkreisen. Da für die Volumendifferenzen das Verhältnis 2:3 gilt, ist es somit auch für die Oberflächen erwiesen.

ANNE FINSLER, Dornach.