205. Man zeige: a) Alle Kegelstümpfe, die in der Höhe und in der Länge der erzeugenden «Meridiankurve» (Mantellinie + Radien der begrenzenden Kreise) übereinstimmen, haben dieselbe Gesamtoberfläche.
b) Es gibt genau einen nichttrivialen Zylinder und einen symmetrischen Doppelkegel, welche in der Gesamtoberfläche und im Flächeninhalt eines Achsenschnittes übereinstimmen. H. BIERI, Bern.

206. Zwei koaxiale Drehzylinder mit den Radien r und $2r$ werden auf beiden Seiten durch je ein Paraboloid zweiter Ordnung begrenzt, dessen Achse parallel zur Zylinderachse ist. Es sei V_2 das Volumen des Zylinders mit dem Radius $2r$, und M_1 und M_2 seien die Mantelflächen der Zylinder mit den Radien r bzw. $2r$. Man zeige, dass unabhängig von der Wahl der beiden Paraboloide gilt:

$$3V_2 = r(4M_1 + M_2).$$

R. LAUFFER, Graz.

207. a) Keine Quadratzahl weist in dezimaler Schreibung lauter gleiche Ziffern auf, es wäre denn eine einzige. (Demgegenüber besteht zum Beispiel 121 im Dreiersystem aus lauter Einern.)
b) Es gibt nach Aufgabe 163 Quadratzahlen, die in dezimaler Schreibung mit einer beliebig vorgegebenen Ziffernfolge beginnen, also auch mit lauter gleichen Ziffern. Aber Endungen mit lauter gleichen Ziffern, wie etwa bei 144, gibt es nur sehr wenige. Welche? A. STOLL, Zürich.

208. Berechne für ein ganzes $n \geqq 1$ und ein ganzes $p \geqq 0$ die Summe

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{n+k+p}.$$

E. TROST, Zürich.

Literaturüberschau

E. TROST: *Primzahlen*

95 Seiten, Verlag Birkhäuser, Basel 1953

Die Lehre von der Verteilung der Primzahlen wurde nach dem Erscheinen der bekannten Arbeit von BERNHARD RIEMANN zunächst mit Hilfsmitteln der Funktionentheorie bearbeitet. Seit einigen Jahrzehnten begannen Forscher, «elementare Methoden», welche nur den Logarithmus aus der Funktionentheorie entlehnen, zu entwickeln, und sie erhielten damit überraschende Resultate. Der Verfasser gibt eine klare und reichhaltige Übersicht über dieses noch relativ junge Gebiet, und er versteht es, auch dem Freund der Mathematik, der über wenige Spezialkenntnisse verfügt, die Pforte zu öffnen und ihn zu fesseln. Denn dass das Arbeiten in den Fragen der Primzahlen grosse Freude bereitet, ist längst bekannt.

Zunächst wird der Primzahlsatz in der Gestalt $\lim \pi(x) \log x/x = 1$ vorgeführt, wo $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $\leqq x$ bezeichnet. Gleich wird auch gezeigt, wie EUKLIDS Verfahren zum Beweis der Existenz unendlichvieler Primzahlen sogar auf gewisse arithmetische Progressionen ausgedehnt werden kann. Es folgen grundlegende Sätze aus der Zahlentheorie, namentlich ein musterhaft kurzer Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes. Tief in die Lehre von den binären quadratischen Formen führt die Frage, welche unter ihnen «viele» Primzahlen darstellen, wobei das Autorenverzeichnis durch FROBENIUS zu ergänzen wäre. Auch hier wird für einige Fälle ein schöner Satz mit einfachen Mitteln bewiesen. Besonders gut scheint mir der Abschnitt VI, «Allgemeine Aussagen über $\pi(x)$ und p_n», gelungen zu sein. Nicht nur werden eine Reihe prägnanter Beweise gegeben, sondern wir erhalten auch Einblick in viele Fragestellungen, wobei wir besonders auf die Finslerschen Untersuchungen hinweisen möchten. Im VII. Abschnitt wird der neue Selbergsche «elementare» Beweis des Primzahlsatzes, sorgfältig überarbeitet auf sieben Seiten erbracht. Dieser Abschnitt ist zweifellos der Höhepunkt des Buches. Nachdem auch der Satz über die arithmetische Progression elementar bewiesen ist, bringen die beiden letzten Abschnitte neuere Methoden, welche das Siebverfahren und die Goldbachsche Vermutung betreffen und den ausserordentlichen Scharfsinn der Autoren bewundern lassen.

Wir möchten das Studium dieses kleinen Buches den Freunden der Mathematik bestens empfehlen, und wir sind überzeugt, dass niemand davon enttäuscht sein wird.

Da der Name Leonhard Eulers auffallend oft vorkommt, so sei es mir zum Schluss noch erlaubt, dessen früheste Entdeckung im Gebiet der Primzahlen zu erwähnen. Nennen wir einen mathematischen Prozess «primzahlfrei», falls er die Kenntnis der Primzahlen nicht voraussetzt, so wird in der *Introductio* (vgl. auch die Vorrede zum Band I/9 der Euler-Werke, Seite XVI) bewiesen, dass für die ganze transzendente Funktion $\Pi(1-z^2/p^2)$, deren Nullstellen die positiven und negativen Primzahlen sind, die zugehörige Potenzreihe primzahlfrei angegeben werden kann. Da auch der Übergang zur inversen Funktion primzahlfrei ist, so lässt sich eine analytische Funktion primzahlfrei angeben, deren Werte an der Nullstelle gerade die positiven und negativen Primzahlen sind. *A. Speiser.*

N. Altshiller-Court: *College Geometry*

2. Auflage, 313 Seiten, 156 Figuren, Barnes & Noble, New York 1952

Wer sich lehrend, lernend oder zum Zeitvertreib mit planimetrischen Aufgaben abgibt, muss an diesem Buch seine helle Freude haben. Den Lehrer wird vor allen Dingen das reichhaltige und systematisch geordnete Übungsmaterial beglücken, den Studenten die reizvolle Darbietung mit ihren ermutigenden Ratschlägen und helfenden Hinweisen und den Liebhaber die vielen neuen Knacknüsse, an denen er seine Kraft erproben und seinen Problemhunger stillen kann.

In mehr als 400 Musterbeispielen werden Begriffe definiert, Konstruktions- und Beweismethoden vorgeführt und Berechnungen (mit allgemeinen Zahlen) angestellt. Anschliessend an jeden Abschnitt folgen zugehörige Übungsaufgaben – es sind ihrer mehr als 600 –, ohne dass ihnen die Lösung beigegeben ist. Dasselbe gilt von etwa 300 Ergänzungs- und Repetitionsaufgaben, die von Zeit zu Zeit für diejenigen eingestreut sind, die sich zu schwierigeren Problemen hingezogen fühlen.

Wie der Titel, *College Geometry*, verrät, setzt das Buch voraus, dass der Leser seinen Euklid gelernt hat. Der Verfasser weist nachdrücklich auf die wichtige, aber oft verkannte Rolle des Gedächtnisses beim Lösen planimetrischer Aufgaben hin. Im ersten Kapitel, das den geometrischen Konstruktionen im allgemeinen gewidmet ist, kann darum als 5. Problem schon die Aufgabe behandelt werden, mit der unsere Zeitschrift vor acht Jahren eröffnet wurde, nämlich, ein Quadrat zu konstruieren, dessen Seiten oder deren Verlängerungen durch vier gegebene Punkte gehen. Man findet hier eine einfache planimetrische Lösung und eine Figur, in der die sechs möglichen Lösungen übersichtlich dargestellt sind. Dagegen wird die Bewältigung des dualen Problems, einem Viereck ein Quadrat einzubeschreiben, dem begabten Schüler als Repetitionsaufgabe gestellt.

Das zweite Kapitel handelt von Ähnlichkeit und ähnlicher Lage, während das dritte und längste Kapitel in sieben Abschnitten die klassische Dreiecksgeometrie verarbeitet. Die sogenannte neuere Dreiecksgeometrie findet naturgemäss ihre Darstellung erst im letzten (10.) Kapitel. Vorher kommt noch in einem eigenen Kapitel die Vierecksgeometrie. Hier fehlt merkwürdigerweise die Erwähnung des bizentrischen Vierecks, über das es so hübsche Aufgaben gibt. Die Simsonsche Gerade, Transversalen, harmonische Teilung, eine umfangreiche und höchst anziehende moderne Kreisgeometrie und die

Inversion bilden den Inhalt der übrigen Kapitel. In einem Anhang sind wertvolle historische und bibliographische Anmerkungen zusammengestellt.

Man mag einwenden, all dies und mehr enthalte bereits die berühmte Sammlung der *Exercices de Géométrie* von F. G.-M. Zugegeben, allein dieses jedem Lehrer unentbehrliche Buch stellt doch eher ein «corpus geometriae canonicum» dar, in dessen unerschöpfliche Fundgrube nur beherzte Kämpen hinabzutauchen pflegen, oder allenfalls Verzweifelte, um Erlösung zu finden, nachdem sie eine eigene Lösung lange erfolglos gesucht haben. Demgegenüber ist diese *College Geometry* ein einladendes Vademecum, dem man sich gerne und mit wachsender Begeisterung anvertraut. *W. Honegger.*

ÉMILE BOREL: *Les nombres premiers*

133 Seiten, Collection «Que sais-je», Nr. 571, Presses universitaires de France, Paris 1953

Das Bändchen enthält hauptsächlich das für die elementare Primzahltheorie notwendige zahlentheoretische Werkzeug (Kongruenzen, Primitivwurzeln, φ-Funktion, quadratische Reste). Das Reziprozitätsgesetz wird erwähnt, aber nicht bewiesen. Hingegen findet man mehrere Beweise für den kleinen Fermatschen Satz, der in dieser Darstellung eine zentrale Stellung hat. Entgegen der Ansicht des Verfassers ist dieser Satz aber keine charakteristische Primzahleigenschaft, da es zusammengesetzte Exponenten n gibt (Zahlen von CARMICHAEL), für die $a^{n-1}-1$ für *alle* zu n primen a durch n teilbar ist. Von den Primzahlkriterien wird nur der Satz von WILSON bewiesen. Die sehr ausführliche Behandlung der Quadratsummen hat mehr allgemein zahlentheoretisches Interesse. In den Ausführungen über die Verteilung der Primzahlen herrscht der wahrscheinlichkeitstheoretisch-statistische Gesichtspunkt vor. In diesem Sinn ist auch die «Ableitung» des Primzahlsatzes (*loi de raréfaction*) zu werten. Dank leichter Verständlichkeit ist das Büchlein sehr geeignet, dem Leser einen Einblick in die Primzahltheorie zu geben, die der Verfasser mit Recht eine der schönsten Eroberungen des menschlichen Geistes nennt. *E. Trost.*

K. SCHÜTTE und B. L. VAN DER WAERDEN:

Das Problem der dreizehn Kugeln

Math. Ann. *125*, 325–334 (1953)

An die Einheitskugel E lassen sich 12 Einheitskugeln anlegen, nämlich in den Ecken des E einbeschriebenen Ikosaeders. Da die Kantenlänge dieses Ikosaeders >1 ist, ist der euklidische Abstand (Sehne) der Eckpunkte auf $E>1$, so dass die 12 Kugeln sich nicht berühren. Somit wäre denkbar, dass sich auch 13 Einheitskugeln an E anlegen lassen. In der vorliegenden Arbeit gibt jeder der beiden Verfasser einen Beweis dafür, dass das nicht möglich ist, womit eine alte Streitfrage zwischen NEWTON und GREGORY ihre Erledigung findet.

Ist r der Radius der kleinsten Kugel, auf der 13 Punkte mit dem Mindestabstand 1 Platz haben und an die somit 13 Einheitskugeln angelegt werden können, so muss $r>1$ gezeigt werden. Die Bestimmung bzw. Abschätzung des Radius $r(N)$ der Minimalkugel zu N Punkten mit Mindestabstand 1 ist von den Verfassern in einer früheren Arbeit begonnen worden [*Auf welcher Kugel haben 5, 6, 7, 8 oder 9 Punkte mit Mindestabstand 1 Platz?*, Math. Ann. *123*, 96–124 (1951), Besprechung in El. Math. *7*, 23–24 (1952)]. Wie dort beruht auch hier die Untersuchung auf der Betrachtung des Graphen, der durch die Verbindungen der Punkte mit Mindestabstand 1 durch Grosskreisbogen gebildet wird. [Man findet eine Darstellung dieser Methode im VI. Kapitel des Werkes von L. FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum* (Springer-Verlag, Berlin 1953).] *E. Trost.*

Eingegangene Werke[1])

CENTRE BELGE DE RECHERCHES MATHÉMATIQUES

Colloque de géométrie différentielle

Georges Thone, Liège; Masson & Cie, Paris 1951

(BOMPIANI, FAVARD, TERRACINI, SCHOUTEN, VINCENSINI, HAANTJES, LICHNEROWICZ, HLAVATY, KUIPER, SIMONART, VAN BOUCHOUT, BACKES, GODEAUX, ROZET, DEBEVER).

CENTRE BELGE DE RECHERCHES MATHÉMATIQUES

Deuxième Colloque de géométrie algébrique

Georges Thone, Liège; Masson & Cie, Paris 1952

(CHISINI, GAUTHIER, VILLA, KÄHLER, DOLBEAULT, CONFORTO, ANDREOTTI, NÉRON, GRÖBNER, GAETA, BURNIAT, NOLLET, GODEAUX).

Compositio Mathematica

Verlag P. Noordhoff, Groningen

Vol. 11, Fasc. 2 (1953): W. R. BAUM: *Die Nullwegegruppe und ihre Verallgemeinerungen.* H. G. BERGMANN, *The Boundary Layer Problem for Certain Non-linear Ordinary Differential Equations.*

Mémorial des sciences mathématiques

Verlag Gauthier-Villars, Paris

1952. Fasc. 118: M. PARODI, *Sur quelques propriétés des valeurs caractéristiques des matrices carrées.* – Fasc. 119: C. TRUESDELL, *Vorticity and the Thermodynamic State in a Gas Flow.* – Fasc. 120: A. CHARRUEAU, *Complexes linéaires. Faisceaux de complexes linéaires. Suites et cycles de complexes linéaires conjugués.* – Fasc. 121: D. WOLKOWITSCH, *Sur les applications de la notion de moment d'inertie en géométrie.*

1953. Fasc. 122: L. GODEAUX, *Les transformations birationnelles du plan* (Seconde édition entièrement refondue). – Fasc. 123: P. SAMUEL, *Algèbre locale.*

1954. Fasc. 124: K. MENGER, *Géométrie générale.* – Fasc. 125: W. J. TRJITZINSKY, *Les problèmes de totalisation se rattachant aux laplaciens non sommables.*

Im Verlag Gauthier-Villars, Paris, sind ferner erschienen:

HAO WANG et R. NAUGHTON, *Les systèmes axiomatiques de la théorie des ensembles* (1953).
P. DIVE, *Ondes ellipsoïdales et relativité* (1950).
H. B. CURRY, *Leçons de logique algébrique* (1952).
S. MANDELBROJT, *Séries adhérentes, régularisation des suites, applications* (1952).
J. L. DESTOUCHES, *Méthodologie, notions géométriques* (1953).
M. FRÉCHET, *Pages choisies d'analyse générale* (1953).
L. DE BROGLIE, *Eléments de théorie des quanta et de mécanique ondulatoire* (1953).
A. MONDIÈZ, *Cours de physique industrielle*; Tome I: *Ecoulement des fluides à travers les orifices, tuyères et conduites, cheminées, ventilateurs, appareils à jet, transmission de la chaleur* (1954).
M. L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR et R. CROISOT, *Leçons sur la théorie des treillis des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques* (1953).
H. MILLOUX et CH. PISOT, *Principes, méthodes générales*; Tome I: *Traité de théorie des fonctions* (1953).
G. JULIA, *Cours de géométrie infinitésimale*; Premier fascicule: *Vecteurs et tenseurs Théorie élémentaire* (1953).
R. GARNIER, *Cours de cinématique*; Tome I: *Cinématique du point et du solide. Composition des mouvements* (Troisième édition, revue et augmentée; 1954).

[1]) Besprechung vorbehalten.