Einfall und Überlegung in der Mathematik

Autor(en): **Waerden, B.L. van der**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **9 (1954)**

Heft 3

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-17358

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

El. Math. Band IX Nr. 3 Seiten 49–72 Basel, 15. Mai 1954

Einfall und Überlegung in der Mathematik[1])

Der Beweis der Vermutung von Baudet

In der ersten Abhandlung dieser Reihe habe ich kurz über einen Einfall berichtet, bei dem durch einen glücklichen Zusammenlauf die Bedingungen, unter denen der Einfall entstand, genau beschrieben werden können. Das soll jetzt näher ausgeführt werden.

Der früh verstorbene holländische Mathematiker Baudet hatte die folgende Vermutung ausgesprochen:

Teilt man die Gesamtheit der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... in zwei Klassen ein, so enthält mindestens eine dieser Klassen eine arithmetische Progression von l Gliedern, wobei l eine beliebig vorgegebene natürliche Zahl ist.

Als Artin, Schreier und ich uns in Hamburg 1926 vor Artins Wandtafel über diese Vermutung unterhielten, ist es uns zusammen gelungen, sie zu beweisen. Eine ganz wesentliche Idee stammt dabei von Artin. Der Einfall, der schliesslich die Lösung brachte, wurde mir zuteil.

Der Fall, dass nur eine zweigliedrige Progression verlangt wird ($l = 2$) ist trivial: werden drei Zahlen in zwei Klassen eingeteilt, so müssen zwei zur selben Klasse gehören.

Auch im Fall $l = 3$ ist es so, dass man nicht alle natürlichen Zahlen zu betrachten braucht, sondern nur die Zahlen von 1 bis 9. Bei jeder Zweiteilung dieser Zahlen enthält eine der beiden Klassen eine dreigliedrige Progression; das beweist man leicht durch eine Aufzählung der möglichen Fälle. Man kann etwa so vorgehen.

Die Klasse, die die Zahl 1 enthält, kann man die erste nennen. Je nachdem, zu welchen Klassen die Zahlen 2, 3 und 4 gehören, erhält man acht mögliche Fälle. Als Beispiel möge der Fall behandelt werden, dass 1 und 2 zur ersten, 3 und 4 zur zweiten Klasse gehören.

Wenn 5 zur zweiten Klasse gehört, haben wir die Progression 3, 4, 5. Also können wir annehmen, dass 5 zur ersten Klasse gehört.

Wenn 8 zur ersten Klasse gehört, haben wir die Progression 2, 5, 8. Also möge 8 zur zweiten Klasse gehören.

Wenn 6 zur zweiten Klasse gehört, haben wir 4, 6, 8. Also möge 6 zur ersten Klasse gehören.

Will man die Progression 5, 6, 7 vermeiden, so muss man 7 in die zweite Klasse stecken.

---

[1]) 3. Mitteilung.

Die Zahl 9 gerät nun in eine Zwangslage. Wenn sie zur ersten Klasse gehört, haben wir die Progression 1, 5, 9, wenn aber zur zweiten Klasse, so haben wir 7, 8, 9.

Ähnlich, oder noch einfacher, behandelt man alle anderen Fälle. Das alles hatte ich mir schon vor der Zusammenkunft mit ARTIN und SCHREIER überlegt.

SCHREIER stellte nun die Frage, ob die Vermutung von BAUDET sich dahin verschärfen liesse, dass immer nur ein endlicher Abschnitt der Zahlenreihe in Betracht gezogen werden muss, mit anderen Worten, ob es eine Schranke $N(l)$ gibt, so dass bereits bei der Einteilung der Zahlen von 1 bis $N(l)$ in zwei Klassen eine dieser Klassen eine l-gliedrige Progression enthält. Die Frage war leicht zu beantworten. Wenn die Vermutung von BAUDET überhaupt richtig ist, so überlegten wir uns, dann gibt es auch ein solches $N(l)$. Eine bekannte mengentheoretische Schlussweise, das «Diagonalverfahren», führt zu diesem Ergebnis. Es ist nicht nötig, diese Schlussweise hier zu reproduzieren, da sie in den anschliessenden Überlegungen keine Rolle mehr spielt.

Wir versuchten nun, die Vermutung gleich in der verschärften Form mit der Schranke $N(l)$ zu beweisen. Wenn der Satz etwa durch vollständige Induktion bewiesen werden soll, kann eine solche finite Verschärfung nur von Vorteil sein, so überlegten wir uns.

ARTIN machte sodann die Bemerkung, dass die Vermutung, wenn sie für zwei Klassen allgemein richtig ist, auch für k Klassen gelten muss. Es sei zum Beispiel $k = 4$. Dann kann man die Klassen zunächst zu zwei und zwei zusammennehmen. So erhält man eine gröbere Einteilung in nur zwei Klassen. In einer dieser beiden muss eine arithmetische Progression von $N(l)$ Gliedern liegen. Die Glieder dieser Progression kann man von 1 bis $N(l)$ numerieren. Diese Nummern erscheinen nun wieder in zwei Klassen der feineren Klasseneinteilung eingeteilt, und nach dem Satz, den wir für zwei Klassen als richtig angenommen haben, muss in einer dieser Klassen eine Progression von l Gliedern liegen.

So kommt man von zwei auf vier Klassen, genau so von vier auf acht Klassen usw. Die Klassenzahl kann also beliebig gross sein.

Wir versuchten nun, den Satz durch vollständige Induktion nach l zu beweisen. Für $l = 2$ hat man das sogenannte «*Schubfachprinzip*»: Wenn $k + 1$ Dinge auf k Schubfächer verteilt werden, so muss eines der Fächer mindestens zwei Dinge enthalten. Ein sehr nützliches Prinzip, das DIRICHLET in der Zahlentheorie mit Erfolg angewandt hat.

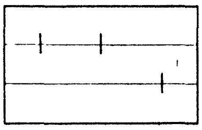
ARTIN erwartete – und der Erfolg hat ihm recht gegeben –, dass die Verallgemeinerung von zwei auf k Klassen für die Induktion von Vorteil sein würde. Man kann nämlich, so meinte er, nun versuchen, die Vermutung für ein beliebiges k und für die Länge l zu beweisen, unter der Induktionsvoraussetzung, dass sie für *alle* k und für die Länge $l - 1$ schon bewiesen sei.

Diese zunächst etwas unbestimmte Überlegung wurde im weiteren Verlauf der Diskussion, in der Hauptsache durch ARTIN, folgendermassen verschärft. Es soll etwa die Vermutung für zwei Klassen und für Progressionen der Länge l bewiesen werden. Sind alle ganzen Zahlen in zwei Klassen eingeteilt, so sind zum Beispiel die Tripel aufeinanderfolgender Zahlen automatisch in acht Klassen eingeteilt, denn die drei Zahlen des Tripels können unabhängig voneinander in Klasse 1 oder 2 liegen, und das gibt $2^3 = 8$ Möglichkeiten. Man kann nun diese Zahlentripel durchnumerieren, etwa indem man jeweils die Anfangszahl des Tripels als Nummer nimmt, so dass

Tripel Nummer n aus den Zahlen n, $n+1$ und $n+2$ besteht. Die Nummern erscheinen dann in acht Klassen eingeteilt, und auf diese acht Klassen kann man unbedenklich die Induktionsvoraussetzung anwenden.

Dasselbe gilt, wenn man «Blöcke» von mehr als drei aufeinanderfolgenden Zahlen betrachtet. Nach der Induktionsvoraussetzung gibt es unter genügend vielen aufeinanderfolgenden Blöcken eine $(l-1)$-gliedrige arithmetische Progression von Blöcken. Das «Muster» der Verteilung der Zahlen auf die Klassen, das wir in einem dieser Blöcke vorfinden, wiederholt sich genau so in allen $l-1$ Blöcken der Progression. Vielleicht, so meinte ARTIN, geben diese sich wiederholenden Muster uns die Mittel zur Konstruktion einer l-gliedrigen Folge. Ausserdem enthalten die Blöcke selbst, wenn sie genügend lang sind, $(l-1)$-gliedrige arithmetische Progressionen von Zahlen einer Klasse. Auch diese können zur Konstruktion benutzt werden.

Wir versuchten nun, da im Fall $l=2$ der Satz sicher richtig ist, von $l=2$ auf $l=3$ zu schliessen, und zwar nahmen wir zunächst zwei Klassen an (ohne Rücksicht darauf,



Figur 1

dass dieser Fall schon vorher durch direkte Aufzählung aller Fälle erledigt war). Wir zeichneten die Zahlen als kleine Querstriche im waagrechten Abstand 1 auf zwei waagrechten Linien, die die beiden Klassen darstellen sollten.

Unter je drei aufeinanderfolgenden Zahlen muss es nach der Induktionsvoraussetzung, das heisst in diesem Fall nach dem Schubfachprinzip, zwei geben, die derselben Klasse angehören, etwa der ersten. Setzen wir nun die arithmetische Progression, die mit diesen beiden Strichen anfängt, fort, so können wir annehmen, dass der dritte Strich nicht mehr der ersten Klasse angehört (sonst wären wir ja schon fertig), sondern der zweiten. Somit ergibt sich das Bild der Figur 1.

Soweit wurden alle Überlegungen von uns gemeinsam angestellt. Ich überlegte mir nun weiter folgendes.

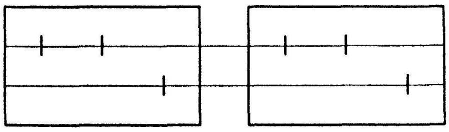
In jedem Block von fünf aufeinanderfolgenden Zahlen muss ein Muster von der Art der Figur 1 vorkommen, denn unter den ersten drei Zahlen des Blockes muss es schon zwei geben, die derselben Klasse angehören, und diese zweigliedrige Progression kann dann innerhalb des Blockes zu einer dreigliedrigen Progression fortgesetzt werden.

Solche Muster wiederholen sich. Denn die Blöcke von fünf Zahlen sind ja in $2^5=32$ Klassen eingeteilt, und unter 33 aufeinanderfolgenden Blöcken[1]) muss es nach dem Schubfachprinzip mindestens zwei gleiche geben. So ergibt sich das Bild der Figur 2, wobei der waagrechte Abstand zwischen dem Anfang des ersten und des zweiten Blockes höchstens 32 beträgt.

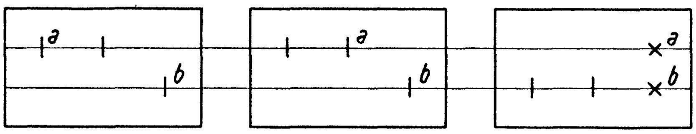
Das gibt aber immer noch keine dreigliedrige Progression. Um eine solche zu erhalten, habe ich den zweiten Block von fünf Zahlen noch einmal um dieselbe Strecke verschoben und die dreigliedrige Progression betrachtet, die aus den angestrichenen Zahlen durch diese Verschiebung entsteht.

[1]) «Aufeinanderfolgend» soll heissen: jeweils um Eins verschoben.

Die dritte Zahl dieser verschobenen Progression hat nun keinen Ausweg mehr. Entweder sie gehört in die erste Klasse: dann gibt es dort die arithmetische Progression a, a, a. Oder sie gehört in die zweite Klasse: dann gibt es die Progression b, b, b in der zweiten Klasse.



Figur 2

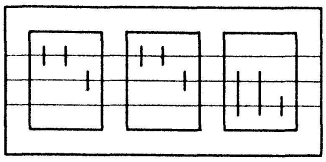


Figur 3

Dieser Beweis galt zunächst nur für den bereits früher erledigten Fall $k = 2$, $l = 3$. Trotzdem hatte ich, als ich ihn vorbrachte, das sichere Gefühl, nun den allgemeinen Beweis in Händen zu haben.

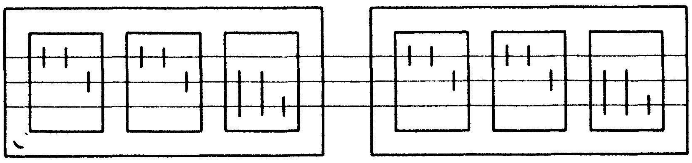
Artin und Schreier glaubten es noch nicht. Da führte ich ihnen den analogen Beweis für den nächst höheren Fall $k = 3$, $l = 3$ vor.

In diesem Fall kann man zunächst genau dieselbe Überlegung anstellen (mit Blöcken zu sieben statt zu fünf und mit Abstand 3^5 statt 2^5), aber nun hat die dritte Zahl im dritten Block wohl einen Ausweg. Sie kann in die dritte Klasse hinein, und man erhält das folgende Muster:



Figur 4

In jedem grossen Block von $3^5 + 3^5 + 7 = h$ aufeinanderfolgenden Zahlen gibt es ein solches Muster. Nun zerfallen die grossen Blöcke in 3^h Klassen. Unter je $3^h + 1$ aufeinanderfolgenden grossen Blöcken gibt es nach dem Schubfachprinzip zwei gleiche. In diese zeichne man die kleinen Blöcke hinein, und man erhält das Bild der Figur 5.

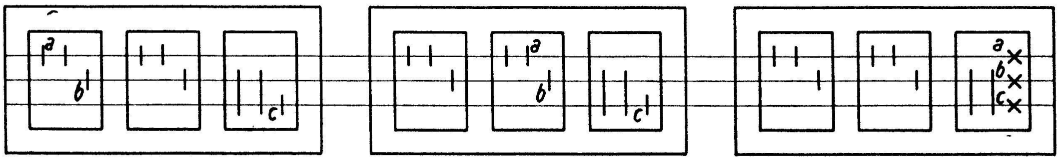


Figur 5

Jetzt verschiebe man den grossen Block, und man erhält dann an der Stelle der verschobenen Zahl c entweder eine Progression a, a, a in der ersten Klasse oder eine Progression b, b, b in der zweiten oder c, c, c in der dritten (Figur 6).

Jetzt war es allen Beteiligten klar, dass für $l = 3$ das Beweisverfahren sich auf beliebige k übertragen lässt. Aber ARTIN und SCHREIER wollten nun noch den Fall $l = 4$ sehen.

Ich nahm zunächst wieder zwei Klassen an. Nach dem bereits Bewiesenen gibt es unter genügend vielen, sagen wir n aufeinanderfolgenden Zahlen eine dreigliedrige

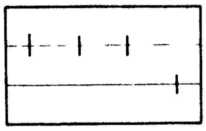


Figur 6

Progression, deren Terme alle einer Klasse angehören. Setzt man die Progression fort, so wird der vierte Term der anderen Klasse angehören (sonst wären wir ja schon fertig). Alle vier Zahlen gehören einem Block von m aufeinanderfolgenden Zahlen an, wobei m das grösste Ganze aus

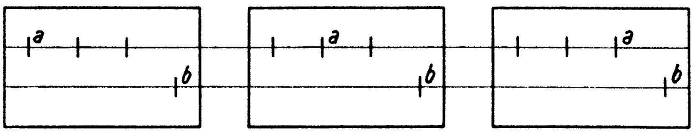
$$n + \frac{n-1}{2} \tag{1}$$

ist. In jedem solchen Block kommt also das in Figur 7 abgebildete Muster vor:



Figur 7

Die Blöcke von der Länge g sind in 2^g Klassen eingeteilt. Unter genügend vielen, sagen wir $n(3, 2^g)$ aufeinanderfolgenden Blöcken gibt es also drei Blöcke in arithmetischer Progression, die derselben Klasse angehören. Das Muster im ersten Block wiederholt sich genau so im zweiten und dritten (Figur 8).



Figur 8

Fügt man nun noch einen vierten Block hinzu, so erhält man wieder zwangsläufig eine arithmetische Progression a, a, a, a oder b, b, b, b.

Nachdem ich das ausgeführt hatte, war es uns allen dreien klar, dass es genau so weitergeht, dass man auch für beliebige l nacheinander alle Fälle $k = 2, 3, \ldots$ erledigen und so den Schluss von $l - 1$ auf l allgemein vollziehen kann.

Der Beweis, den ich im «Nieuw Archief voor Wiskunde» *15*, 212 (1927) dargestellt habe, ist die genaue Ausführung des hier anschaulich erläuterten Gedankenganges.

Dem vorhin gebildeten Ausdruck (1), der allgemein so lautet:

$$n + \left[\frac{n-1}{l-2}\right] \tag{2}$$

entspricht im «Nieuw Archief» beim Schluss von $l-1$ auf l der Ausdruck

$$n(l-1, k) + \left[\frac{n(l-1, k) - 1}{l-2}\right]. \tag{3}$$

Der Beweis, den CHINTSCHIN in seinem sehr schönen Büchlein[1]) bringt, ist nicht wesentlich von meinem Beweis verschieden; nur nimmt CHINTSCHIN statt (2) einfach $2n$. Weiter betrachtet er statt aufeinanderfolgender Blöcke solche, die nebeneinanderstehen und sich berühren, wie $(a, \ldots, a+b-1)$ und $(a+b, \ldots, a+2b-1)$, wodurch die Abschätzungen etwas gröber werden.

Die Psychologie des Findens hat ihre eigentümlichen Schwierigkeiten. Den meisten von uns fällt es schwer, sich nachträglich an alles, was einem durch den Kopf gegangen ist, zu erinnern. Noch schwerer ist es, die eigenen vorbereitenden Überlegungen so wiederzugeben, dass auch andere sie verstehen. Die kurzen Andeutungen, in denen man mit sich selbst spricht, lassen sich ohne Präzisierung und Erläuterung nicht mitteilen, und durch die Präzisierung werden die Gedanken geändert.

Im Fall unseres Gesprächs über die Vermutung von BAUDET liegen aber die Bedingungen für die Wiedergabe viel günstiger. Denn alle Gedanken, die sich bei uns bildeten, wurden sofort ausgesprochen und durch Kreidestriche den anderen verdeutlicht. Was ausgesprochen und gezeichnet wird, kann man viel besser festhalten und reproduzieren als blosse Gedanken. Alle Anregungen, die ich von ARTIN und SCHREIER erhielt, wurden ebenfalls ausgesprochen *und wirkten auf mich nur, soweit sie ausgesprochen wurden.* Also ein idealer Fall, um den Prozess des Findens zu analysieren, um die echten Einfälle gegen die systematischen Überlegungen abzugrenzen.

Die geometrische Veranschaulichung der Zahlen durch Querstriche lag auf der Hand. Auch lag es auf der Hand, zu versuchen, die unendliche Zahlenreihe durch einen endlichen Abschnitt zu ersetzen, besonders nachdem in den einfachsten Beispielen ein endlicher Abschnitt sich bereits als hinreichend erwiesen hatte. Ein endlicher Abschnitt ist greifbarer, übersichtlicher als die unendliche Zahlenreihe. Wir hatten guten Grund, zu erwarten, dass durch diese Verschärfung der Behauptung die vollständige Induktion erleichtert werden würde.

«Immer mit den ganz einfachen Beispielen anfangen», pflegte HILBERT zu sagen. So fingen wir mit dem Fall $l=2$ an und kamen auf das bekannte «Schubfachprinzip». Dieses gilt nicht nur für $k=2$, sondern für beliebige k. So lag die Verallgemeinerung auf beliebige k auf der Hand.

Da für $l=2$ die Vermutung richtig ist, lag es nahe, einen Schluss von $l-1$ auf l anzusetzen. Für den Induktionsbeweis ist es selbstverständlich am günstigsten, wenn man für die Länge $l-1$ möglichst viel voraussetzt und für die Länge l zunächst möglichst wenig zu beweisen sich vornimmt.

Damit war der Plan des Beweises vorgezeichnet. Für die Länge $l-1$ und für *alle k* sollte die Vermutung als richtig angenommen werden, und wir versuchten, für die

[1]) A. J. CHINTSCHIN, *Drei Perlen der Zahlentheorie* (Russisch 1947; Deutsch 1951, Akademie-Verlag, Berlin; Englisch 1952).

Länge l und für ein einziges k, etwa $k=2$, die Vermutung zu beweisen. Dabei beschränkten wir uns zunächst auf den einfachsten Fall ($k=2$, $l=3$) und versuchten, eine Überlegung zu finden, die sich vielleicht auf höhere Fälle übertragen lassen würde.

Nach dem Schubfachprinzip gibt es in einer der Klassen eine zweigliedrige Progression $(a, a+d)$. Um zu einer dreigliedrigen Progression zu kommen, muss man die Zahl $a+2d$ hinzunehmen. Liegt sie in der gleichen Klasse wie a und $a+d$, so ist man fertig; man kann also annehmen, dass $a+2d$ in der anderen Klasse liegt (Figur 1).

Soweit war alles ziemlich zwangsläufig, aber nun stockte der Beweis. Um weiter zu kommen, war ein Einfall nötig, und wenn mein Gedächtnis mich nicht trügt, war es ARTIN, der ihn hatte. Wir können die Induktionsvoraussetzung (in diesem Fall also das Schubfachprinzip) nicht nur auf Zahlen, sondern auch auf Blöcke von aufeinanderfolgenden Zahlen anwenden; denn auch diese sind in Klassen eingeteilt. Die Anzahl der Klassen ist etwas grösser, aber das schadet nichts, da wir ja die Induktionsvoraussetzung für *alle* k zur Verfügung haben.

Durch den Einfall von ARTIN war die Wiederholbarkeit eines ganzen Blockmusters gesichert, und wir konnten die Figur 2 zeichnen, die im ersten Block zwei Zahlen der ersten und eine der zweiten Klasse in arithmetischer Progression zeigt, im zweiten Block die entsprechenden Zahlen in denselben Klassen.

Wie sollte man nun von hier zu einer dreigliedrigen Progression kommen? Erinnern wir uns daran, dass in dem vorhin behandelten Beispiel der Zahlen von 1 bis 9 die Zwangslage für die Zahl 9 darin bestand, dass sie sowohl in der ersten wie in der zweiten Klasse eine dreigliedrige Proportion bilden würde, im ersten Fall mit 1 und 5, im zweiten Fall mit 7 und 8.

Ganz ähnlich kommt man nun hier zu einer Zwangslage, indem man den in der Figur 3 dargestellten dritten Block hinzunimmt und darin eine Zahl findet, die entweder in der ersten Klasse eine dreigliedrige Progression a, a, a oder in der zweiten Klasse eine Progression b, b, b bildet.

Das war also mein Einfall. Nach dem Gesagten dürfte es klar sein, dass der Einfall ganz nahelag und durch die vorangehenden Überlegungen fast zwangsläufig hervorgerufen wurde. Die einzige Zahl, die in der Situation der Figur 2 sowohl mit zwei Zahlen der ersten Klasse eine Progression a, a, a als mit zwei Zahlen der zweiten Klasse eine Progression b, b, b bildet, ist die mit a und b bezeichnete dritte Zahl des dritten Blockes der Figur 3.

Das Bemerkenswerteste an diesem Einfall war das Gefühl der vollkommenen Sicherheit, das ihn begleitete. Ich hatte die intuitive Überzeugung, dass genau dieselbe Beweismethode, die ich im Fall $k=2$ und $l=3$ an der Tafel vorführte, auch in allen höheren Fällen zum Ziel führen würde.

Wie diese Überzeugung sich im Unbewussten bilden konnte, das weiss ich nicht. Ich glaube aber, erklären zu können, warum ARTIN und SCHREIER nicht so sicher waren, auch nachdem ich ihnen den Fall $k=2$, $l=3$ erklärt hatte. Sie sahen nur das Ergebnis: das Vorhandensein der Progression a, a, a in der ersten oder b, b, b in der zweiten Klasse. Ich aber hatte eine Methode gefunden, diese Progressionen zu bilden, und ich hatte das bestimmte Gefühl, dass diese Methode auch auf die höheren Fälle anwendbar sein würde.

Es ist, wie wenn einer Äpfel von einem Baum pflückt. Wenn man einen Apfel gepflückt hat und ein anderer hängt etwas höher, so kann es sein, dass man selbst weiss, dass man mit etwas mehr Anstrengung den andern Apfel auch noch erreichen kann, während ein Zuschauer, der nur sieht, dass man den einen Apfel gerade erreicht hat, darüber im Zweifel ist. Man hat eben nicht nur den Apfel, sondern auch das Gefühl der Bewegungen, die man ausgeführt hat, um ihn zu pflücken.

Das Gefühl, dass eine Beweismethode noch weiter reicht, ist manchmal trügerisch. Oft stellt sich nachher heraus, dass in den höheren Fällen eine neue Schwierigkeit auftaucht. Trotzdem gehören solche Ahnungen über die Tragweite von Beweismethoden zu den nützlichsten Wegweisern bei der mathematischen Forschung.

B. L. VAN DER WAERDEN, Zürich.

Über die natürliche Gleichung

$$R(s) = \mu a \left(\lambda + \cos \frac{s}{a}\right)$$

I.

Eine *Eilinie* ist eine geschlossene doppelpunktsfreie Kurve, deren Krümmung $\varkappa = 1/R$ festes Zeichen hat. Ihre *natürliche Gleichung* $R = R(s)$ ist eine periodische Funktion $R(s) = R(s+u)$ der Bogenlänge s, deren (nicht notwendig primitive!) Periode u der Umfang der Eilinie ist. Wegen des *Vierscheitelsatzes für Eilinien* muss $R(s)$ innerhalb eines Periodenintervalls $0 \leqq s < u$ mindestens vier relative Extrema, also $R'(s)$ mindestens vier Nullstellen haben.

L. BIEBERBACH[1]) erwähnt als einfaches *Beispiel* einer natürlichen Gleichung, die *keine Eilinie* kennzeichne, die positive Funktion $R = 2 + \sin s$ der primitiven Periode 2π, deren Ableitung in $0 \leqq s < 2\pi$ ja nur an zwei Stellen verschwinde. Es ist die Absicht dieser Zeilen, zu zeigen, dass *diese Schlussweise nicht stichhaltig* ist. Es wird hier nämlich irrtümlich die primitive Periode 2π gleich dem Umfang u gesetzt.

Wir werden im Gegensatz zu der Aussage von BIEBERBACH zeigen, dass allgemeiner die Funktion

$$R(s) = \mu a \left(\lambda + \cos \frac{s}{a}\right) \tag{1}$$

für bestimmte $\lambda > 1$ und $\mu > 0$ stets die natürliche Gleichung einer Eilinie sein kann. (λ und μ sind dimensionslose Parameter, die Konstante a hat die Dimension einer Länge.) Die *primitive Periode* $p = 2a\pi$ von (1) kann dann natürlich wegen des Vierscheitelsatzes nicht identisch mit dem *Umfange* u der Eilinie sein. Es ist vielmehr $u = mp = 2am\pi$ ($m > 1$, ganz). Die Eilinie wird dann $2m \geqq 4$ Scheitel haben. Das Studium der Kurven (1) wird sich auch deshalb lohnen, weil sich bei ihnen einige interessante gestaltliche Verhältnisse ergeben.

II.

Einen *Überblick über den Verlauf der Kurven* (1) kann man sich konstruktiv auf folgende Art[2]) verschaffen. Wir tragen $R = R(s)$ in einem rechtwinkligen Koordina-

[1]) L. BIEBERBACH, *Differentialgeometrie* (Teubner, Leipzig 1932, S. 25).

[2]) K. STRUBECKER, Vorlesung über Differentialgeometrie an der TH. Karlsruhe 1948/49.