Kurze Herleitung der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel

Autor(en): **Hadwiger, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **9 (1954)**

Heft 5

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-17361

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

El. Math. Band IX Nr. 5 Seiten 97–120 Basel, 15. September 1954

Kurze Herleitung der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel

HEINZ HOPF zum 60. Geburtstag gewidmet

Wie W. BLASCHKE, ein Altmeister der Theorie der konvexen Körper, noch kürzlich[1]) feststellte, «steht ein wirklich einfacher Beweis für die isoperimetrische Haupteigenschaft der Kugel immer noch aus». Immerhin darf gesagt werden, dass insbesondere durch die neueren Methoden der direkten Mengengeometrie gegenüber den klassischen, mehr analytischen Verfahren, wie sie noch H. A. SCHWARZ in seinem berühmten Beweis verwendet hat, erhebliche Fortschritte erzielt worden sind. Genannt seien hier neuere Beweise von G. BOL, A. DINGHAS, E. SCHMIDT und andern.

Die hier gegebene Herleitung stützt sich lediglich auf einfache Tatsachen der Theorie der konvexen Körper, verwendet die Minkowskische Linearkombination, die Parallelkörperbildung sowie die Steinerschen Formeln und setzt noch den Auswahlsatz BLASCHKES voraus.

Im übrigen bleiben die Rechnungen im Rahmen der elementaren Analysis.

Da sich im Zuge der Beweiskonstruktion auch gleichzeitig zwei Ungleichungen MINKOWSKIS ergeben, entschloss sich der Verfasser, diese Lösung des Problems, welche dem erstrebten Ziel der Einfachheit und Kürze schon recht nahe zu kommen scheint, Herrn H. HOPF zuzueignen, der den neu erzielten Fortschritten bei den Isoperimetriebeweisen stets Interesse entgegenbrachte.

I.

Es wird eine Begründung der isoperimetrischen Ungleichung

$$F^3 - 36\,\pi\,V^2 \geqq 0 \tag{1}$$

für eigentliche konvexe Körper des gewöhnlichen Raumes vorgetragen und gezeigt, dass Gleichheit nur für die Kugel besteht.

Gleichzeitig wird die Gültigkeit der beiden Minkowskischen Ungleichungen

$$M^2 - 4\,\pi\,F \geqq 0, \tag{2a}$$

$$M^3 - 48\,\pi^2\,V \geqq 0 \tag{2b}$$

[1]) W. BLASCHKE, *Griechische und anschauliche Geometrie*, Mathematische Einzelschriften, Bd. 1 (R. Oldenbourg, München 1953), S. 44.

nachgewiesen. In (1) und (2) bedeuten V, F, M Volumen, Oberfläche und Integral der mittleren Krümmung.

Wir gehen von einer Parameterdarstellung der Gesamtheit der inneren Punkte P eines eigentlichen Eikörpers A aus.

Indem wir uns auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem beziehen, beschreiben wir zunächst A wie folgt: Bezeichnet A'' die orthogonale Projektion von A auf die x-Achse, A' diejenige auf die (x, y)-Ebene, so gelte

$$A'': \quad u < x < u + a; \tag{3a}$$

$$A': \quad v(x) < y < v(x) + b(x) \quad [(x) \in A'']; \tag{3b}$$

$$A: \quad w(x, y) < z < w(x, y) + c(x, y) \quad [(x, y) \in A']. \tag{3c}$$

Bedeutet $T(\lambda, \nu, \mu)$ einen Punkt des offenen Einheitswürfels E: $0 < \lambda < 1$; $0 < \nu < 1$; $0 < \mu < 1$, so ordnen wir ihm einen innern Punkt $P(x, y, z)$ des Körpers A wie folgt zu:

$$x = \bar{x}(\lambda) = u + \lambda\, a; \tag{4a}$$

$$y = \bar{y}(\lambda, \nu) = v(x) + \nu\, b(x); \tag{4b}$$

$$z = \bar{z}(\lambda, \nu, \mu) = w(x, y) + \mu\, c(x, y). \tag{4c}$$

Wie man sich leicht überlegt, ist durch die Zuordnung von T zu P eine eineindeutige und stetige Abbildung des offenen Einheitswürfels E auf den offenen Kern von A erklärt.

Im weiteren setzen wir noch

$$a = \alpha, \quad b(x) = b[\bar{x}(\lambda)] = \beta(\lambda) \quad \text{und} \quad c(x, y) = c[\bar{x}(\lambda),\ \bar{y}(\lambda, \nu)] = \gamma(\lambda, \nu).$$

II.

Es sei A_0 ein extremaler Eikörper, der bei vorgegebenem M_0 (>0) das grösste V_0 (>0) aufweist. Die Existenz von A_0 ergibt sich nach dem Auswahlsatz auf Grund der Bemerkung, dass alle zulässigen Eikörper in eine Kugel eingelagert werden können, deren Grösse nur von M_0 abhängt.

Weiter sei A_1 ein Eikörper, der aus A_0 durch eine Drehung um die x-Achse hervorgeht.

Nun bilden wir den Eikörper

$$A = \frac{1}{2} A_0 \times \frac{1}{2} A_1,$$

der aus A_0 und A_1 durch die angedeutete Minkowskische Linearkombination gewonnen wird.

Die Punkte $P(x, y, z)$ von A ergeben sich nach dem Ansatz

$$(x, y, z) = \left(\frac{x_0 + x_1}{2},\ \frac{y_0 + y_1}{2},\ \frac{z_0 + z_1}{2}\right),$$

wobei die Punkte $P_i(x_i, y_i, z_i)$ unabhängig voneinander in A_i $(i = 0, 1)$ variieren.

Der Körper $\bar{A}$, dessen Punkte $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ sich dagegen nach dem Ansatz

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{\bar{x}_0 + \bar{x}_1}{2}, \frac{\bar{y}_0 + \bar{y}_1}{2}, \frac{\bar{z}_0 + \bar{z}_1}{2}\right)$$

gewinnen lassen, wobei die Punkte $\bar{P}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ in abhängiger Weise in A_i $(i = 0, 1)$ so variieren, dass sie demselben Punkt T des Einheitswürfels E entsprechen, wird offenbar in A enthalten sein, so dass $\bar{A} \subset A$ gilt. Demnach wird auch (a) $\bar{V} \leqq V$ sein.

Nach (4) ergibt sich mit Rücksicht auf $\alpha_0 = \alpha_1$

$$d\bar{x}\, d\bar{y}\, d\bar{z} = \frac{\alpha_0}{4} [\beta_0(\lambda) + \beta_1(\lambda)]\, [\gamma_0(\lambda, \nu) + \gamma_1(\lambda, \nu)]\, d\lambda\, d\nu\, d\mu, \tag{5}$$

und demnach

$$\bar{V} = \frac{\alpha_0}{4} \int_0^1 \int_0^1 [\beta_0(\lambda) + \beta_1(\lambda)]\, [\gamma_0(\lambda, \nu) + \gamma_1(\lambda, \nu)]\, d\lambda\, d\nu. \tag{6}$$

Berücksichtigen wir weiter, dass

$$\beta_i(\lambda) \int_0^1 \gamma_i(\lambda, \nu)\, d\nu = f_i(\lambda) \qquad (i = 0, 1) \tag{7}$$

gilt, wo $f_i(\lambda)$ den Flächeninhalt des Eibereichs $A_i(\lambda)$ darstellt, der durch die Ebene $x = u + \lambda a$ aus A_i ausgeschnitten wird, und bedenken wir noch, dass $f_0(\lambda) = f_1(\lambda)$ ist, so resultiert aus (6)

$$\bar{V} = \frac{\alpha_0}{4} \int_0^1 \left[2 + \frac{\beta_0(\lambda)}{\beta_1(\lambda)} + \frac{\beta_1(\lambda)}{\beta_0(\lambda)}\right] f_0(\lambda)\, d\lambda, \tag{8}$$

und da der Wert in der eckigen Klammer nicht kleiner als 4 ist,

$$\bar{V} \geqq \alpha_0 \int_0^1 f_0(\lambda)\, d\lambda = V_0. \tag{9}$$

Zusammen mit (a) resultiert (b) $V \geqq V_0$.

Da sich bei der Minkowskischen Linearkombination von Eikörpern die Breiten in fester Richtung in gleicher Weise linear kombinieren und da weiter das Integral der mittleren Krümmung proportional zur mittleren Breite ist, folgt in unserem Falle (c) $M = M_0$. Wegen der Extremaleigenschaft von A_0 muss in (b) Gleichheit bestehen, so dass (d) $V = V_0$ gilt. Notwendigerweise muss auch in der Abschätzung (9) das Gleichheitszeichen gelten; dies kann im Hinblick auf die Stetigkeit des Ausdrucks in der eckigen Klammer von (8) nur dann sein, wenn $\beta_0(\lambda) = \beta_1(\lambda)$ ausfällt. Beachten wir, dass die Schnittbereiche $A_0(\lambda)$ und $A_1(\lambda)$ kongruent und um einen beliebigen Winkel gegeneinander gedreht sind, so hat die obige Feststellung die Konsequenz, dass $A_0(\lambda)$ ein Eibereich konstanter Breite sein muss. Da die Lage des Koordinatensystems relativ zu A_0 frei wählbar war, ziehen wir die weitergehende Folgerung, dass A_0 durch jede Ebene in einem Bereich konstanter Breite (Orbiforme) geschnitten wird.

Jetzt ergibt sich leicht, dass A_0 eine Kugel sein muss. In der Tat[1]: Es bezeichne K_0 die Umkugel des (abgeschlossenen) Körpers A_0 und S deren Oberfläche. Der Durchschnitt $M = A_0 S$ enthält wenigstens zwei Punkte. Ist $M = S$, so ist $A_0 = K_0$, und die Behauptung ist bewiesen. Treffen wir die Gegenannahme, dass $S - M$ eine (in S offene) nichtleere Menge sei, so gibt es eine (in S offene) sphärische Kalotte N vom positiven Radius, welche ganz zu $S - M$ gehört und deren Randkreis C wenigstens zwei Punkte P und Q enthält, die zu M gehören. Nun legen wir durch P und Q eine Ebene E, welche aus K_0 einen Kreisbereich EK_0 vom Durchmesser PQ ausschneidet. Auch die offensichtlich ganz im Kreis EK_0 liegende Orbiforme (Voraussetzung!) EA_0 besitzt dann die (konstante) Breite PQ, und demzufolge muss EA_0 mit EK_0 zusammenfallen. Insbesondere folgt, dass der Kreisrand C_0 von EK_0 ganz zu M gehört. C und C_0 laufen durch P und Q, wobei aber C_0 nicht in das Innere der von C begrenzten Kalotte N eindringen darf. So folgt, dass C mit C_0 zusammenfällt und dass P und Q Gegenpunkte auf C sein müssen. Da nun aber, wie oben festgestellt, C_0 zu M gehört, lassen sich an Stelle von P und Q zwei andere Punkte P' und Q' auf C wählen, die sicher nicht Gegenpunkte sind. Die gleiche Konstruktion führt jetzt auf einen Widerspruch.

Da also A_0 eine Kugel ist, gilt $M_0^3 - 48\pi^2 V_0 = 0$, und so ergibt sich im Hinblick auf die Extremaleigenschaft von A_0 für einen beliebigen Eikörper A das Bestehen der Ungleichung (2b).

III.

Es bezeichne $A(\varrho)$ den äusseren Parallelkörper von A im Abstand ϱ $(\geqq 0)$, das heisst die Mittelpunktsmenge aller Kugeln vom Radius ϱ, welche A treffen. Nach STEINER gelten für die Masszahlen $M(\varrho)$, $F(\varrho)$ und $V(\varrho)$ des Parallelkörpers die Formeln

$$M(\varrho) = M + 4\pi\varrho; \tag{10a}$$

$$F(\varrho) = F + 2M\varrho + 4\pi\varrho^2; \tag{10b}$$

$$V(\varrho) = V + F\varrho + M\varrho^2 + \frac{4\pi}{3}\varrho^3. \tag{10c}$$

Wie man ausrechnet, gilt

$$M^3(\varrho) - 48\pi^2 V(\varrho) = M^3 - 48\pi^2 V + 12\pi(M^2 - 4\pi F)\varrho,$$

und da dieser Ausdruck nach (2b) für alle $0 \leqq \varrho < \infty$ nichtnegativ bleiben muss, schliesst man auf das Bestehen der Ungleichung (2a).

IV.

Hier bezeichne $A(-\varrho)$ den inneren Parallelkörper von A im Abstand ϱ $(\geqq 0)$, das heisst die Mittelpunktsmenge aller Kugeln vom Radius ϱ, welche ganz in A enthalten sind. Offenbar unterliegt ϱ der Einschränkung $0 \leqq \varrho \leqq r$ (r = Inkugelradius). Werden

---

[1] Die damit zum Ausdruck gebrachte Charakterisierung der Kugel lässt sich auf verschiedene Art nachbeweisen. Den hier vorgetragenen kurzen und hübschen Beweis hat Herr H. DEBRUNNER (Bern) gefunden.

die Masszahlen dieses Parellelkörpers mit $M(-\varrho)$, $F(-\varrho)$ und $V(-\varrho)$ bezeichnet, so hat man wegen der unmittelbar aus den Definitionen folgenden Relation $[A(-\varrho)](\varrho) \subset A$ nach (10b):

$$F(-\varrho) + 2M(-\varrho)\,\varrho + 4\pi\varrho^2 \leqq F. \tag{a}$$

Wendet man auf das hier auftretende $M(-\varrho)$ die Ungleichung (2a) an, so resultiert mit einfacher Umrechnung

$$F(-\varrho) \leqq \left(\sqrt{F} - \sqrt{4\pi}\,\varrho\right)^2. \tag{b}$$

Da innerhalb der Parallelschar stets $F(-\varrho) = V'(-\varrho)$ gilt, so gewinnt man durch Integration in (b) von 0 bis r

$$V \leqq F r - \sqrt{4\pi F}\, r^2 + \frac{4\pi}{3} r^3, \tag{c}$$

oder bei passender Umformung schliesslich

$$\sqrt{F^3} - \sqrt{36\pi}\, V \geqq \left(\sqrt{F} - \sqrt{4\pi}\, r\right)^3. \tag{d}$$

Dies ist eine Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung (1), welche es abzulesen gestattet, dass Gleichheit für eigentliche Eikörper ($r > 0$) nur für die Kugel bestehen kann, da die rechte Seite in (d) nur verschwindet, wenn A mit seiner Inkugel zusammenfällt. Für uneigentliche Eikörper wird die isoperimetrische Ungleichung auch durch eine Strecke ($F = V = 0$) befriedigt. H. HADWIGER, Bern.

Zur Erzeugung ebener Figuren durch Projektion

Zahlreiche Inzidenzsätze der ebenen Geometrie lassen sich auf sehr übersichtliche Weise oft dadurch beweisen, dass die auftretenden ebenen Figuren als Projektionen von räumlichen Figuren interpretiert werden, wobei gee'gnete Rotationsflächen zweiter Ordnung im Mittelpunkt der Betrachtungen stehen. Ein auf dieser Idee aufgebauter Beweis der Kegelschnittsätze von PASCAL und BRIANCHON dürfte bekannt sein[1]). Im weitern lassen sich durch die räumliche Interpretation ebener Figuren in vielen Fällen für planimetrische Konstruktionsaufgaben recht einfache Lösungen gewinnen, die nur Hilfsmittel aus der darstellenden Geometrie benötigen[2]). Bei der Beschäftigung mit dem genannten Problemkreis ist der Verfasser dieser Zeilen auf die nachfolgenden Zusammenhänge gestossen, die infolge ihrer Verknüpfung mit der darstellenden Geometrie der Rotationsflächen zweiter Ordnung von einigem Interesse sein dürften. Sollten von diesen Ausführungen einige Anregungen für den Geometrieunterricht ausgehen, so ist eine Absicht des Verfassers in Erfüllung gegangen.

---

1) Eine ausführliche Darstellung findet sich etwa in W. BLASCHKE, *Projektive Geometrie* (Birkhäuser, Basel 1954), Seite 70, sowie in E. STIEFEL, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie* (Birkhäuser, Basel 1947), Seite 89.

2) Siehe etwa im vorgenannten *Lehrbuch der darstellenden Geometrie* von E. STIEFEL, Seite 102.