Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **9 (1954)**

Heft 5

6. Für ein Kegelschnittbüschel, dessen vier Grundpunkte auf einem Kreise liegen, ermittle man die gemeinsamen Achsenrichtungen (Figur 3).
7. Man beweise den Desarguesschen Involutionssatz für Kegelschnittbüschel, welcher besagt, dass die Kurven des Büschels auf jeder Geraden m involutorische Punktreihen herausschneiden.
(Man verwende den Kegelschnitt, der durch die Verbindungsebene μ von m und S aus der Fläche zweiter Ordnung herausgeschnitten wird).
8. Welche stereometrische Aufgabe geht aus dem planimetrischen Problem hervor, einen Kreis zu konstruieren, der durch zwei gegebene Punkte geht und eine vorgegebene Gerade berührt?
9. Von einem Kegelschnitt c kennt man drei Punkte A, B, P sowie den Krümmungskreis in P. Man konstruiere die beiden Tangenten in A und B (Figur 5).
10. Welche geometrischen Zusammenhänge deckt der Sturmsche Satz in den folgenden drei Spezialfällen auf?
a) zwei Kegelschnitte sind ausgeartet, der dritte hingegen ist nicht ausgeartet;
b) alle drei Kegelschnitte sind ausgeartet;
c) c_1, c_2 und c_3 sind Kreise.

M. JEGER, Olten und Zürich.

Ungelöste Probleme

Nr. 1. Herr G. PÓLYA weist darauf hin (Brief vom 27. April 1954 an den Unterzeichneten), dass es wünschenswert wäre, einen einfachen Beweis der Ungleichung

$$L^4 - 32\,\pi^3\,I \geqq 0$$

zu kennen. L bezeichnet den Umfang eines ebenen konvexen Bereichs und I das polare Trägheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes. Gleichheit besteht für den Kreisbereich. Die Ungleichung ist unseres Wissens erstmals von G. PÓLYA und G. SZEGÖ (*Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics* [Princeton 1951], S. 10) mitgeteilt und im Zusammenhang mit andern sich auf weitere Bereichsfunktionale beziehenden Relationen bewiesen worden. Eine von der dort entwickelten Theorie unabhängige Herleitung der Ungleichung, die mit einfachen Hilfsmitteln auskommt, ist nicht bekannt und auch dem Unterzeichneten nicht gelungen.

H. HADWIGER, Bern.

Aufgaben

Aufgabe 189. Es bedeute ω die Masszahl des Raumwinkels einer Ecke eines regelmässigen Polyeders und Ω die Masszahl der Summe der Raumwinkel des Polyeders ($\Omega = e\,\omega$, wobei e die Eckenanzahl). Als Einheit nehmen wir den vollen Raumwinkel; für den Würfel ist also $\omega = 1/8$, $\Omega = 1$. Zwischen den Zahlen Ω der regelmässigen Polyeder bestehen eigentümliche Beziehungen, die anzugeben und zu beweisen sind.

Zum Beispiel:

$$\begin{array}{llr}
\Omega \text{ (Oktaeder)} & + \Omega \text{ (8eckiger Tetraederstern)} & = 1, \\
\Omega \text{ (Dodekaeder)} & + \Omega \text{ (20eckiges Sterndodekaeder)} & = 5, \\
\Omega \text{ (Dodekaeder)} & - \Omega \text{ (12eckiges Sterndodekaeder)} & = 4, \\
\Omega \text{ (12eckiges Sterndodekaeder)} & + \Omega \text{ (20eckiges Sterndodekaeder)} & = 1, \\
\Omega \text{ (Dodekaeder)} & + \Omega \text{ (sterneckiges Dodekaeder)} & = 7, \\
\Omega \text{ (Ikosaeder)} & + \Omega \text{ (sterneckiges Ikosaeder)} & = 3.
\end{array}$$

L. LOCHER-ERNST, Winterthur.

Solution. Notations: A = Dodécaèdre régulier convexe; B = Dodécaèdre régulier de troisième espèce à faces étoilées (12eckiges Sterndodekaeder); C = dodécaèdre régulier de troisième espèce à faces convexes (sterneckiges Dodekaeder); D = dodécaèdre régulier de septième espèce (20eckiges Sterndodekaeder); I = icosaèdre régulier; I′ = icosaèdre régulier étoilé; O = octaèdre régulier; T = double tétraèdre (8eckiger Tetraederstern); soient $a, b, \ldots, i', o, t$ les angles dièdres correspondants.

L'aire ω d'un polygone sphérique d'espèce p et d'angles α_i est donnée par

$$4\pi\omega = \sum \alpha_i - (n-2)\pi + 2(f-1)\pi$$

(en supposant l'aire de la sphère prise pour unité).

Par conséquent, en se rappelant la constitution des angles des polyèdres, on obtient les valeurs suivantes pour la mesure des angles solides:

$$\begin{array}{llll}
4\pi\omega(A) = 3a - \pi, & & \Omega(A) = 20\omega(A), \\
4\pi\omega(B) = 5b - 3\pi, & & \Omega(B) = 12\omega(B), \\
4\pi\omega(C) = 5c - 3\pi + 2\pi, & & \Omega(C) = 12\omega(C), \\
4\pi\omega(D) = 3d - \pi, & & \Omega(D) = 20\omega(D), \\
4\pi\omega(I) = 5i - 3\pi, & & \Omega(I) = 12\omega(I), \\
4\pi\omega(I') = 5i' - 3\pi + 2\pi, & & \Omega(I') = 12\omega(I'), \\
4\pi\omega(O) = 4o - 2\pi, & & \Omega(O) = 6\omega(O), \\
4\pi\omega(T) = 3t - \pi, & & \Omega(T) = 8\omega(T).
\end{array}$$

D'autre part, si l'on considère que les polyèdres étoilés s'obtiennent à partir des polyèdres convexes en prolongeant les faces adéquates, on établit les relations suivantes entre les angles:

$$(1)\ a = b; \quad (2)\ d = \pi - a; \quad (3)\ c = \pi - a; \quad (4)\ i' = \pi - i; \quad (5)\ o + t = \pi.$$

On trouve dès lors les résultats cherchés:

$$\Omega(A) - \Omega(B) = 4; \quad \Omega(A) + \Omega(C) = 7; \quad \Omega(A) + \Omega(D) = 5,$$
$$\Omega(I) + \Omega(I') = 3; \quad \Omega(O) + \Omega(T) = 1.$$

On sait que, à part la relation (5), il n'existe aucune relation rationnelle entre les dièdres des polyèdres réguliers convexes; les relations (1) à (5) sont donc les seules relations entre les dièdres des polyèdres réguliers et, par conséquent, les cinq relations indépendantes entre les Ω sont aussi les seules qui puissent exister.

J.-P. SYDLER, Zurich.

Weitere Lösungen. Durch Kombination von zwei anderen eingesandten Lösungen ergibt sich eine besonders elementare Herleitung. Das reguläre Polyeder besitze als Flächen m-Ecke von der p-ten Art und als räumliche Ecken n-Flache von der q-ten Art; α sei der Winkel zwischen benachbarten Flächen.

J. SCHOPP (Budapest) berechnet für alle regulären Polyeder $\cos\alpha$. Aus einem geeigneten Dreieck entnimmt man zunächst

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \left(\cos\frac{q\pi}{n}\right) : \left(\sin\frac{p\pi}{m}\right).$$

Hieraus ergeben sich für cos α die folgenden Werte:

Tetraederstern:	$+1:3$;	Oktaeder:	$-1:3$;
Ikosaeder:	$-\sqrt{5}:3$;	sterneckiges Ikosaeder:	$+\sqrt{5}:3$;
Dodekaeder:	$-\sqrt{5}:5$;	sterneckiges Dodekaeder:	$+\sqrt{5}:5$;
12eckiges Sterndodekaeder:	$-\sqrt{5}:5$;	20eckiges Sterndodekaeder:	$+\sqrt{5}:5$.

Hieraus folgen einfache Beziehungen zwischen den Flächenwinkeln α, aus denen sich die behaupteten Gleichungen ergeben. Herr SCHOPP macht darauf aufmerksam, dass auch zwischen den Zahlen Ω der regelmässigen und der archimedischen Polyeder einige Gleichungen ähnlicher Natur gelten.

J. STROMMER (Budapest) gewinnt die Lösung, indem er zuerst den folgenden Satz beweist:

Für zwei regelmässige Polyeder beliebiger Art, aber mit derselben Kantenzahl, gilt: Ihre Raumwinkeldifferenz oder Raumwinkelsumme ist ein ganzzahliges Vielfaches des vollen Raumwinkels, je nachdem ihre Flächenwinkel gleich oder supplementär sind.

Beweis: Der von einer Ecke gebildete räumliche Winkel ω (mit dem vollen Raumwinkel als Einheit) beträgt

$$\omega = \frac{1}{4}\, n\, \frac{\alpha^0}{180^0} + \frac{q}{2} - \frac{n}{4} \qquad \text{bzw.} \qquad \omega = \frac{q}{2} - \frac{1}{4}\, n\, \frac{\alpha^0}{180^0},$$

je nachdem der Flächenwinkel α^0 oder $180^0 - \alpha^0$ ist.

Wegen $e\,n = 2\,k$ (k = Kantenzahl) somit:

$$\Omega = e\,\omega = \frac{1}{4} \cdot 2\,k\, \frac{\alpha^0}{180^0} + \frac{e\,q}{2} - \frac{2\,k}{4} \qquad \text{bzw.} \qquad \Omega = \frac{e\,q}{2} - \frac{1}{4} \cdot 2\,k\, \frac{\alpha^0}{180^0}.$$

Hieraus folgen sofort die Sätze: Für zwei Polyeder mit gleichem k und supplementären Flächenwinkeln ergibt sich

$$\Omega_1 + \Omega_2 = \frac{1}{2}\,(e_1\,q_1 + e_2\,q_2 - k);$$

für solche mit gleichen Flächenwinkeln

$$\Omega_1 - \Omega_2 = \frac{1}{2}\,(e_1\,q_1 - e_2\,q_2).$$

Hieraus folgt unter Berücksichtigung der obigen Zusammenstellung für cos α sofort die in der Aufgabenstellung angegebenen (und noch weitere) Beziehungen.

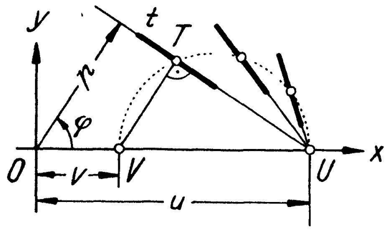
Eine weitere ausführliche Lösung sandte R. LAUFFER (Graz).

Aufgabe 190. Es sind Drehflächen zu suchen, die bei Normalprojektion auf eine Ebene einen scheinbaren Umriss unveränderlicher Form zeigen, das heisst eine Umrisslinie, die bei Veränderung der Achsenneigung nur eine Maßstabsänderung erfährt (einfachstes Beispiel: Drehparaboloid). W. WUNDERLICH, Wien.

Lösung des Aufgabenstellers. Wir denken uns die Drehflächenachse als x-Achse eines Normalkoordinatensystems und die Meridiankurve durch die Gleichung $y = y(x)$ beschrieben. Wir betrachten ferner die auf der Achse herrschende Zuordnung zwischen den Fusspunkten zusammengehöriger Tangenten und Normalen $U \rightarrow V = \mathfrak{A}$, analytisch beschrieben durch

$$u = x - \frac{y}{y'}, \qquad v = x + y\,y' \tag{1}$$

und in Hinkunft kurz «Begleitkorrespondenz» der Fläche genannt. Durch die Vorgabe einer solchen Korrespondenz $\mathfrak{A}$ vermöge einer Gleichung $F(u, v) = 0$ wird umgekehrt in der (x, y)-Ebene ein Feld von ∞^2 Linienelementen (T, t) definiert, deren Tangenten und Normalen immer ein Punktepaar U, V von $\mathfrak{A}$ enthalten. Die Integralkurven dieses



Feldes stellen die Meridiankurven von ∞^1 koaxialen Drehflächen dar, die $\mathfrak{A}$ als Begleitkorrespondenz besitzen.

Bei Normalprojektion auf eine Ebene (die nicht zur Achse senkrecht sein soll) wird $\mathfrak{A}$ in eine ähnliche Korrespondenz $\mathfrak{A}' = U' \to V'$ transformiert, die wiederum ein Feld von Linienelementen definiert. Dessen Integralkurven stellen nun die Umrisslinien der genannten Flächenschar dar, weil ein Umrisspunkt T dadurch gekennzeichnet ist, dass seine Normale TV zur Bildebene parallel ist und der rechte Winkel UTV daher wieder als rechter Winkel $U'T'V'$ erscheint. Die zu $\mathfrak{A}$ gehörige Flächenschar zeigt mithin bei beliebiger Achsenneigung stets ein zum Meridiansystem ähnliches System von Umrisslinien. Anders ausgedrückt: Das Meridiansystem enthält, vom Maßstab abgesehen, die Formen sämtlicher Umrisskurven einer Einzelfläche, die diese bei Änderung der Achsenneigung zeigt.

Sollen also diese Umrisslinien, wie es die Aufgabe verlangt, untereinander ähnlich sein, so muss die Korrespondenz $\mathfrak{A}$ gegen Ähnlichkeitstransformationen unempfindlich sein, also selbst eine Ähnlichkeit darstellen, die allgemein durch

$$v = \alpha u + \beta \tag{2}$$

anzusetzen wäre. Für $\alpha \neq 1$ kann jedoch $\beta = 0$ angenommen werden, für $\alpha = 1$ etwa $\beta = 1$.

Die Integration dieser speziellen (quadratischen) Differentialgleichungen erster Ordnung lässt sich unschwer durchführen, wenn man zu polaren Speerkoordinaten übergeht, also die (orientierten) Kurventangenten durch ihren (vorzeichenbegabten) Ursprungsabstand p und dessen Richtungswinkel φ festlegt. Aus der Tangentengleichung $x \cos\varphi + y \sin\varphi = p$ und ihrer partiellen Ableitung nach φ folgt dann

$$\left.\begin{array}{c} x = p\cos\varphi - \dot{p}\sin\varphi, \quad y = p\sin\varphi + \dot{p}\cos\varphi, \quad y' = -\mathrm{ctg}\,\varphi, \\ u = \dfrac{p}{\cos\varphi}, \quad v = -\dfrac{\dot{p}}{\sin\varphi}. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Die Gleichung (2) nimmt nun die Formen an

$$\frac{\dot{p}}{p} = -\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi \quad (\alpha \neq 1) \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\dot{p}\cos\varphi + p\sin\varphi}{\cos^2\varphi} = -\mathrm{tg}\,\varphi \quad (\alpha = 1). \tag{4}$$

Unmittelbare Integration liefert dann bei Unterdrückung der unwesentlichen Integrationskonstanten die Polargleichungen

$$p = \cos^\alpha\varphi \qquad \text{bzw.} \qquad p = \cos\varphi \ln\cos\varphi, \tag{5}$$

und über (3) die Parameterdarstellungen der gesuchten Flächenmeridiane

$$\begin{array}{lcl} x = \cos^{\alpha-1}\varphi\,(\cos^2\varphi + \alpha\sin^2\varphi) & & x = \sin^2\varphi + \ln\cos\varphi, \\ & \text{bzw.} & \\ y = (1-\alpha)\cos^\alpha\varphi\sin\varphi & & y = -\sin\varphi\cos\varphi. \end{array} \tag{6}$$

Wie aus (5) hervorgeht, sind die für $\alpha \neq 1$ auftretenden Meridiankurven polarreziprok zu den Clairautschen Multiplikatrizen $r \cos^{\alpha}\varphi = \text{const.}$ Für rationales α fallen die Drehflächen algebraisch aus; hervorzuheben wären dabei die Fälle

$\alpha = -1$: Drehparaboloid;
$\alpha = 2$: Drehfläche sechster Ordnung, entstehend durch Rotation des «Maltakreuzes» (Parallelkurve der Astroide) um seine Selbstberührungstangente;
$\alpha = 3$: Drehfläche vierter Ordnung, entstehend durch Rotation der Steinerschen Hypozykloide um eine Spitzentangente.

Die zu $\alpha = 1$ gehörige Drehfläche ist transzendent und hat die Gestalt einer verschlossenen Posaune.

Aufgabe 191. Von den eine gegebene Parabel doppelt berührenden Kreisen konstruiere man erstens diejenigen, die durch einen gegebenen Punkt gehen, und zweitens diejenigen, die eine gegebene Gerade berühren. J. Schopp, Budapest.

Lösung: 1. Der Kreis

$$(x - u - p)^2 + y^2 = p^2 + 2\,p\,u$$

mit dem Mittelpunkt $M(u+p;\ 0)$ und dem Radius $\sqrt{p^2+2\,p\,u}$ berührt die Parabel $y^2 = 2\,p\,x$ doppelt in den Punkten $A_{1,2}(u;\ \pm\sqrt{2\,p\,u})$. Soll der Kreis durch den Punkt $P(a;b)$ gehen, so erhält man für u die Werte $u_{1,2} = a \pm \sqrt{2\,a\,p - b^2}$. Der mit der durch P gehenden Parabelordinate $\sqrt{2\,a\,p}$ als Radius um P als Mittelpunkt gezeichnete Kreis schneidet somit auf der x-Achse die Abszissen $u_{1,2}$ der Berührungspunkte $A_{1,2}$ und $B_{1,2}$ heraus, womit auch die Mittelpunkte $M_{1,2}(u_{1,2}+p;\ 0)$ der gesuchten Kreise gefunden sind.

2. Es seien G und H die Schnittpunkte der gegebenen Geraden g mit der Parabel; diese lassen sich mit Zirkel und Lineal konstruieren. Betrachtet man die Parabel als Umrissmeridian eines Rotationsparaboloids, dessen Achse x in der Zeichenebene π liegt, und g als Spur einer zu π senkrechten Ebene ε, so schneidet ε das Paraboloid in einer Ellipse mit $\overline{GH}$ als grosser Achse. Die kleine Achse $2\,m$ ergibt sich, indem man im Parallelkreis, dessen Ebene durch den Mittelpunkt M von $\overline{GH}$ geht, die Sehne senkrecht zu π durch M zeichnet (Konstruktion durch Umlegung dieses Parallelkreises in π). Die gesuchten Kreise ergeben sich nun als Normalprojektion auf π jener beiden dem Paraboloid einbeschriebenen Kugeln, die ε je in einem Punkt P bzw. Q berühren. P und Q fallen mit den beiden Brennpunkten der in ε gelegenen Schnittellipse zusammen[1]). Somit ist $\overline{PM} = \overline{QM} = \sqrt{\overline{MG}^2 - m^2}$, und die Mittelpunkte der gesuchten Kreise sind die Schnittpunkte der zwei Normalen zu g in P und Q mit der Achse x.

Ist $g \parallel x$ im Abstand s, so gibt es nur einen Kreis mit den Berührungspunkten $A_{1,2}$ und dem Mittelpunkt M. Schneidet der Kreis mit dem Radius s und dem Brennpunkt F der Parabel als Mittelpunkt die Leitlinie in $Q_{1,2}$, so ist $MA_{1,2} \parallel FQ_{1,2}$, weil die Subnormale der Parabel gleich dem Parameter ist. Die Punkte $A_{1,2}$ liegen demnach auf den Durchmessern durch $Q_{1,2}$, woraus sich sofort M ergibt. R. Jakobi, Braunschweig.

Der Aufgabensteller betrachtet die gegebene Parabel als Schlagschatten (bei Parallelbeleuchtung) eines Drehparaboloids, dessen Achse zur Bildebene senkrecht steht. Die die Parabel doppelt berührenden Kreise sind dann die Schlagschatten der Parallelkreise des Paraboloids. Der Lichtstrahl durch den gegebenen Punkt bzw. die durch die

---

[1]) Die Tatsache, dass für den elliptischen Schnitt eines Rotationsparaboloids «Dandelinsche Kugeln» existieren, die die Schnittebene in den beiden Brennpunkten berühren, folgt sofort aus folgendem Satz: Die Länge der Tangente von einem Parabelpunkt P an einen einbeschriebenen Kreis ist gleich dem Abstand des Punktes P von der Berührungssehne. Die Berührungssehne für die Parabel $y^2 = 2\,p\,(x + a + p)$ und den Kreis $x^2 + y^2 = p^2 + 2\,a\,p$ ist $x = -p$. Die Tangentenstrecke vom Parabelpunkt (x_0, y_0) aus ergibt sich zu

$$\sqrt{x_0^2 + y_0^2 - p^2 - 2\,a\,p} = x_0 + p\,.$$

(*Anmerkung der Redaktion.*)

Achse des Paraboloids gehende Fallinie der Lichtebene durch die gegebene Gerade schneidet das Paraboloid in zwei Punkten. Die gesuchten Kreise sind die Schlagschatten der Parallelkreise durch diese Punkte.

A. UNTERBERGER (Bludenz) weist auf die Lösung von Aufgabe 150 [El. Math. *8*, 44 (1953)] hin. Wie dort kann auch hier die Parabel als ebener Schnitt eines Rotationskegels aufgefasst werden. Es sind dann diejenigen einbeschriebenen Kugeln zu ermitteln, die durch einen gegebenen Punkt gehen bzw. eine gegebene Gerade berühren.

R. LAUFFER (Graz) verallgemeinert die Aufgabe auf eine beliebige Kurve zweiter Ordnung, die als Umriss der Normalprojektion einer Fläche zweiter Ordnung aufgefasst wird.

Weitere Lösungen sandten L. KIEFFER (Luxemburg), E. ROTHMUND (Zürich) und A. SCHWARZ (Seuzach).

Neue Aufgaben

220. Der Punkt P teilt die Seite BC des Dreiecks ABC im Verhältnis $\overline{BP}:\overline{PC} = 1:2$ (innere Teilung). Ferner ist $\sphericalangle ABC = 45°$, $\sphericalangle APC = 60°$. Man berechne allein mit elementarer euklidischer Geometrie (ohne Trigonometrie) die Grösse des Winkels ACB. F. GOLDNER, London.

221. Alle vier Seitenflächen eines Tetraeders sollen gleichen Flächeninhalt haben. Man beweise, dass folgende drei Punkte zusammenfallen:
1. Der Mittelpunkt der einbeschriebenen Kugel, das heisst der alle vier Seitenflächen innerlich berührenden Kugel.
2. Der Mittelpunkt der Umkugel, das heisst der durch die vier Eckpunkte gehenden Kugel.
3. Der Schwerpunkt des Tetraeders. F. GOLDNER, London.

222. Bei welchen ebenen Kurven ist jeder Kurvenpunkt seine eigene vierte Krümmungsmitte? R. BEREIS, Wien.

223. Calculer

$$1.\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\alpha}{n} + \sin 2\,\frac{\alpha}{n} + \cdots + \sin\alpha}{\frac{\alpha}{n} + \frac{2\,\alpha}{n} + \cdots + \alpha};$$

$$2.\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\alpha + \sin\frac{\alpha}{2} + \cdots + \sin\frac{\alpha}{n}}{\alpha + \frac{\alpha}{2} + \cdots + \frac{\alpha}{n}}.$$

H. BREMEKAMP, Delft.

Berichtigung

Am Schluss von Aufgabe 219 muss $N \geqq n^2$ ersetzt werden durch $N - 1 \geqq (n-1)^2$.

Literaturüberschau

JOHANNES SPOEREL: *Mathematik von der Schule zur Hochschule*

210 Seiten mit 85 Figuren, Walter de Gruyter & Co., Berlin 1954

Das Buch bietet Studenten eine erste Einführung in die Mathematik. Es ist entstanden aus Vorlesungen, die der Verfasser an der Technischen Universität Berlin gehalten hat. Es soll den «Graben» zwischen der Schulmathematik der klassischen