Ungelöste Probleme

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **9 (1954)**

Heft 6

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Zur Behandlung von Gleichungen mit Quadratwurzeln

In der kleinen Mitteilung *Bemerkung zum Rationalmachen von Gleichungen mit Quadratwurzeln,* El. Math. *1,* 35 (1946), wird behauptet, dass eine Gleichung von der Form

$$A + W_1 + W_2 = W_3 + W_4 \,[1]) \tag{1}$$

mit der elementaren Methode des Quadrierens nicht rational gemacht werden kann. Man beachte aber folgendes: Durch zweimaliges Quadrieren erhält man aus (1):

$$[A^2 + W_1^2 + W_2^2 + 2A(W_1 + W_2) + 2W_1W_2 - W_3^2 - W_4^2]^2 = 4W_3^2W_4^2$$

und hat nicht, wie am angeführten Ort behauptet wird, eine Gleichung mit drei, sondern nur mit zwei Wurzeln. Die Ausführung angezeigter Operationen führt auf

$$P + QW_1 + RW_2 + SW_1W_2 = 0 \,[2]). \tag{2}$$

Auflösen nach W_2 und Quadrieren gibt

$$W_2^2 = (P^2 + Q^2W_1^2 + 2PQW_1):(R^2 + S^2W_1^2 + 2RSW_1).$$

Die Auflösung nach W_1 und Quadrieren gibt eine rationale Gleichung. Man hat daher die Gleichung (1) durch viermaliges Quadrieren rational gemacht. Dieses Beispiel zeigt die Methode (die Ausführung sei dem Leser überlassen), die Gleichung

$$A + W_1 + W_2 + \cdots + W_{n-1} + W_n = 0$$

mit Hilfe von n Quadrierungen rational zu machen. Zu beachten ist, dass die Gleichung

$$A + W_1 + \sqrt{B + C\,W_1} = 0$$

durch zweimaliges Quadrieren rational gemacht werden kann. Man hat

$$A^2 + 2AW_1 + W_1^2 = B + CW_1,$$

und rational:

$$W_1^2(2A - C)^2 = (B - A^2 - W_1^2)^2.$$

R. Lauffer, Graz[3]).

Ungelöste Probleme

Nr. 2. Es sei D_n die kleinste (positive, reelle) Zahl mit der Eigenschaft, dass sich jede Punktmenge des n-dimensionalen Raumes vom Durchmesser $D = 1$ in $n + 1$ Teile zerlegen lässt, deren Durchmesser alle nicht grösser als D_n ausfallen. Nach einer bis heute noch unbewiesenen Vermutung von G. Borsuk (*Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre,* Fund. Math. *20,* 177–190 [1933]) gilt $D_n < 1$. Kürzlich

[1]) Wir setzen $P_i\sqrt{Q_i} = \sqrt{P_i^2 Q_i} = W_i$, und es sei W_i nicht rational.

[2]) Der Irrtum ist auf die ungeeignete Symbolik des Verfassers zurückzuführen.

[3]) Der Verfasser ist der Ansicht, dass im Unterricht zu Übungszwecken von irrationalen Gleichungen nur bescheidener Gebrauch zu machen ist. Am besten ist es, sich nur auf Beispiele zu beschränken, welche sich zwanglos aus geometrischen oder physikalischen Aufgaben ergeben und daher nicht den Charakter von Kreuzworträtseln haben.

zeigte D. GALE (*On Inscribing n-Dimensional Sets in a Regular n-Simplex,* Proc. Amer. Math. Soc. *4,* 222–225 [1953]), dass

$$D_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866\ldots$$

ist. Vermutlich gilt

$$D_3 = \sqrt{3 + \frac{\sqrt{3}}{6}} = 0{,}887\ldots$$

(Vgl. hierzu den Aufsatz des Unterzeichneten: *Von der Zerlegung der Kugel in kleinere Teile,* Gazeta Mat. *57,* 1–3 [1954]). Das Borsuksche Problem im gewöhnlichen Raum wäre indessen bereits gelöst, wenn $D < 1$ nachgewiesen werden könnte.

H. HADWIGER, Bern.

Aufgaben

Aufgabe 192. Gegeben sei die additive Abelsche Gruppe der Ordnung 4 vom Typus (2, 2) mit der Additionstafel

	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

In dieser Gruppe wird eine (im allgemeinen weder kommutative noch assoziative) Multiplikation eingeführt, wobei

$$0 \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \cdot b = 0 \cdot c = a \cdot 0 = b \cdot 0 = c \cdot 0 = 0$$

gelten soll. Für die drei Elemente a, b, c kann eine Multiplikationstafel beliebig festgelegt werden, wobei als «Produkte» alle vier Elemente 0, a, b, c auftreten können, so dass es 4^9 verschiedene Multiplikationstafeln gibt.

Man zeige, dass die Multiplikation dann und nur dann beidseitig distributiv bezüglich der Addition ist, wenn für jede Zeile und jede Spalte der Multiplikationstafel die «Quersumme» den Wert 0 ergibt.

A. BAGER, Hjørring (Dänemark).

Lösung: Von der gegebenen Gruppe werden insbesondere die Eigenschaften verwendet, dass ausser dem Nullelement sämtliche Elemente die Ordnung zwei haben (jedes Element ist somit mit seinem Inversen identisch) und dass die Summe zweier der drei von Null verschiedenen Elemente das dritte ergibt. Die Summe der ersten Zeile der Multiplikationstabelle beträgt

$$S_1 = a^2 + a\,b + a\,c\,.$$

Für $S_1 = 0$ erhält man daraus unter Anwendung der eingangs erwähnten Eigenschaften der Gruppe

$$a^2 = a\,b + a\,c = a\,(b + c), \quad a\,b = a^2 + a\,c = a\,(a + c), \quad a\,c = a^2 + a\,b = a\,(a + b). \tag{1}$$

Die übrigen Zeilensummen der Multiplikationstabelle (ohne Nullelement) gewinnt man durch zyklische Vertauschung der Elemente der ersten. Verschwinden diese Zeilen-