Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **9 (1954)**

Heft 6

zeigte D. GALE (*On Inscribing n-Dimensional Sets in a Regular n-Simplex,* Proc. Amer. Math. Soc. *4,* 222–225 [1953]), dass

$$D_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866\ldots$$

ist. Vermutlich gilt

$$D_3 = \sqrt{3 + \frac{\sqrt{3}}{6}} = 0{,}887\ldots$$

(Vgl. hierzu den Aufsatz des Unterzeichneten: *Von der Zerlegung der Kugel in kleinere Teile,* Gazeta Mat. *57,* 1–3 [1954]). Das Borsuksche Problem im gewöhnlichen Raum wäre indessen bereits gelöst, wenn $D < 1$ nachgewiesen werden könnte.

H. HADWIGER, Bern.

Aufgaben

Aufgabe 192. Gegeben sei die additive Abelsche Gruppe der Ordnung 4 vom Typus (2, 2) mit der Additionstafel

	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

In dieser Gruppe wird eine (im allgemeinen weder kommutative noch assoziative) Multiplikation eingeführt, wobei

$$0 \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \cdot b = 0 \cdot c = a \cdot 0 = b \cdot 0 = c \cdot 0 = 0$$

gelten soll. Für die drei Elemente a, b, c kann eine Multiplikationstafel beliebig festgelegt werden, wobei als «Produkte» alle vier Elemente $0, a, b, c$ auftreten können, so dass es 4^9 verschiedene Multiplikationstafeln gibt.

Man zeige, dass die Multiplikation dann und nur dann beidseitig distributiv bezüglich der Addition ist, wenn für jede Zeile und jede Spalte der Multiplikationstafel die «Quersumme» den Wert 0 ergibt.

A. BAGER, Hjørring (Dänemark).

Lösung: Von der gegebenen Gruppe werden insbesondere die Eigenschaften verwendet, dass ausser dem Nullelement sämtliche Elemente die Ordnung zwei haben (jedes Element ist somit mit seinem Inversen identisch) und dass die Summe zweier der drei von Null verschiedenen Elemente das dritte ergibt. Die Summe der ersten Zeile der Multiplikationstabelle beträgt

$$S_1 = a^2 + a\,b + a\,c\,.$$

Für $S_1 = 0$ erhält man daraus unter Anwendung der eingangs erwähnten Eigenschaften der Gruppe

$$a^2 = a\,b + a\,c = a\,(b + c), \quad a\,b = a^2 + a\,c = a\,(a + c), \quad a\,c = a^2 + a\,b = a\,(a + b). \qquad (1)$$

Die übrigen Zeilensummen der Multiplikationstabelle (ohne Nullelement) gewinnt man durch zyklische Vertauschung der Elemente der ersten. Verschwinden diese Zeilensummen, so erhält man analog zu (1) die Beziehungen

$$b\,c + b\,a = b\,(c + a), \quad b^2 + b\,a = b\,(b + a), \quad b^2 + b\,c = b\,(b + c)$$

sowie

$$c\,a + c\,b = c\,(a + b), \quad c^2 + c\,b = c\,(c + b), \quad c^2 + c\,a = c\,(c + a).$$

Die restlichen Beziehungen

$$x\,(y + 0) = x\,y + x\,0 = x\,y \quad \text{und} \quad x\,(y + y) = x\,y + x\,y = 0,$$

wo x, y beliebige Elemente der Gruppe sind, lassen sich leicht verifizieren.

Ist eine der Zeilensummen, etwa S_1, von Null verschieden, so ergibt sich aus

$$a^2 = a\,b + a\,c + S_1 \quad \text{und} \quad a = b + c,$$

dass

$$a\,(b + c) = a\,b + a\,c + S_1 \neq a\,b + a\,c.$$

Damit ist bewiesen, dass die Multiplikation dann und nur dann «linksdistributiv» bezüglich der Addition ist, wenn die Zeilensummen der Multiplikationstafel Null sind. Für die Gültigkeit der «rechtsdistributiven» Multiplikation ist notwendig und hinreichend, dass die Spaltensummen verschwinden. W. STRICKLER, Bern.

Weitere Lösungen sandten R. LAUFFER (Graz) und W. SCHÖNIGER (Wien).

Aufgabe 193. Deux points A et B se déplacent avec des vitesses constantes sur deux droites a et b situées dans un même plan. On donne deux positions A_1 et A_2 de A et deux positions correspondantes B_1 et B_2 de B. Construire la position pour laquelle la distance AB est la plus petite possible. CH. VUILLE, La Chaux-de-Fonds.

1. Lösung: Die beiden Lote zu a und b in zwei entsprechenden Punkten A und B schneiden sich in einem Punkt N. Es ist leicht, zu zeigen, dass der geometrische Ort von N unter den Bedingungen der Aufgabe eine Gerade ist, die durch zwei Punktepaare A_1, B_1 und A_2, B_2 bestimmt ist. Sei O der Schnittpunkt der Geraden a und b, so ist $OANB$ ein Sehnenviereck, ON der Durchmesser des Umkreises, AB Sehne mit konstantem zugehörigem Umfangswinkel $(a\,b)$. Diese Sehne ist dann möglichst klein, wenn der Kreisdurchmesser ON minimal ist. Fällt man also von O das Lot auf die Ortsgerade von N und vom Fusspunkt die Lote auf a und b, so sind deren Fusspunkte die gesuchten Endpunkte der minimalen Distanz. W. ZULLIGER, Küsnacht.

2. Lösung: Die Geraden a, b, A_1B_1, A_2B_2, ... umhüllen eine Parabel. Ist S der Schnittpunkt der Bahngeraden a und b, so erhält man den Brennpunkt F als Schnittpunkt der Umkreise von SA_1B_1 und SA_2B_2 (Satz von LAMBERT). Umgekehrt schneidet jeder Kreis k_j durch S und F aus a und b korrespondierende Lagen A_j und B_j von A und B. Der feste Winkel $(a\,b)$ ist in jedem solchen Kreis Peripheriewinkel über der Sehne A_jB_j. Diese Sehne wird daher um so kürzer sein, je kleiner k_j ist. Das verlangte Minimum $\overline{A_mB_m}$ erhält man daher für den Kreis, welcher die Strecke $\overline{SF}$ zum Durchmesser hat. Da FA_m normal zu a und FB_m normal zu b ist, liegen A_m und B_m auf der Scheiteltangente der Parabel. A. UNTERBERGER, Bludenz, J. SCHOPP, Budapest.

Eine besonders einfache Lösung ergibt sich aus den Einsendungen von C. BINDSCHEDLER (Küsnacht) und G. N. VLAHAVAS (London). Die Vektoren $\overrightarrow{A_1A_2}$ und $\overrightarrow{B_1B_2}$ stellen in einem geeigneten Maßstab die Geschwindigkeiten von A und B dar. Bildet man nun den Vektor $\overrightarrow{B_1Q} = \overrightarrow{B_1B_2} - \overrightarrow{A_1A_2}$, so ist offenbar $\overline{A_2B_2} = \overline{A_1Q}$. Die gesuchte minimale Strecke $\overline{A_mB_m}$ ergibt sich nun, indem man den Fusspunkt P des Lotes von A_1 auf B_1Q bestimmt und durch P die Parallele zu a bis zum Schnittpunkt B_m mit b zieht. Die Parallele zu A_1P durch B_m schneidet a in A_m.

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), L. KIEFFER (Luxemburg), R. LAUFFER (Graz), E. PLÜSS (Riken/Murgenthal), E. ROTHMUND (Zürich) und J. STROMMER (Budapest).

Aufgabe 194. Soient, dans un triangle quelconque, a la base, A le sommet opposé, B le point d'intersection des hauteurs, h_1 et h_2 les hauteurs ne passant pas par A. Soit encore s une droite fixe quelconque. Par le point d'intersection de s et de h_1, menons la parallèle t à h_2.

1° Si l'on considère tous les triangles ayant en commun a, A et B, toutes les droites t enveloppent une parabole p_1.

2° Si l'on permute les rôles de A et B, on obtient une nouvelle parabole p_2.

3° Si a varie, les paraboles p_1 et p_2 ont trois tangentes communes fixes et une tangente commune variable v. v enveloppe une courbe de quatrième classe.

4° Le lieu des foyers des paraboles p_1 est le cercle centré sur s et passant par B et par l'intersection de s et de AB.

5° Soit encore $B'(A')$ la projection de $A(B)$ à partir de l'intersection de a et de s, sur la perpendiculaire menée par $B(A)$ à s. Soient p_1' et p_2' les paraboles de foyers A' et B', tangentes à s. Les paraboles p_1' et p_2' se coupent en deux points R et S. Laissant A et B fixes, on fait varier a. Les points R et S engendrent deux nouvelles paraboles symétriques par rapport à s, passant par les projections de A et B sur s et dont le demi-paramètre est égal à la moyenne géométrique des distances de A et B à s.

J.-P. Sydler, Zurich.

Solution de l'auteur: Les deux faisceaux projectifs h_1 et h_2 engendrent sur s et sur la droite à l'infini deux ponctuelles projectives; les droites de jonction t des points correspondants enveloppent donc une parabole. En prenant h_1 parallèle ou perpendiculaire à AB, on voit que p_1 est tangente: à la perpendiculaire f à AB par l'intersection de AB et de s; à la parallèle g à AB par le point d'intersection de s avec la perpendiculaire à AB par B. Toutes les paraboles p_1 sont donc tangentes à s, f et g; elles forment un faisceau tangentiel; le lieu des foyers est le cercle circonscrit à $s\,f\,g$.

Les paraboles p_2 forment un autre faisceau déterminé par s, f et g' (analogue de g). La droite a établit une correspondance biunivoque entre p_1 et p_2. La quatrième tangente commune (différente de s, f et droite à l'infini) enveloppe donc une courbe de quatrième classe tangente à s et f.

Les paraboles p_1' et p_2' forment deux faisceaux ponctuels projectifs; les points d'intersection des courbes correspondantes engendrent une courbe du quatrième degré qui doit avoir des points doubles aux trois points-bases des faisceaux. Elle dégénère donc en deux paraboles.

Pour les propriétés métriques, procédons analytiquement: $s = O x$; $A(0, b)$; $B(c, d)$. Les foyers des paraboles sont alors $F_1(0, p)$, $F_2(c, q)$ avec $p\,q = b\,d$.

$$p_1': \ x^2 = 2\,p\,y, \qquad p_2': \ (x-c)^2 = 2\,q\,y.$$

Intersection:

$$R\left(\frac{c\,p}{p+\sqrt{b\,d}}\,;\ \frac{c^2\,p}{2\,(p+\sqrt{b\,d})^2}\right), \quad S\left(\frac{c\,p}{p-\sqrt{b\,d}}\,;\ \frac{c^2\,p}{2\,(p-\sqrt{b\,d})^2}\right).$$

Lieu de R: $2\sqrt{b\,d}\,y = (c-x)\,x$. Lieu de S: $2\sqrt{b\,d}\,y = (x-c)\,x$.

Neue Aufgaben

224. In einem Dreieck seien zwei Seiten a und b und der eingeschlossene Winkel γ gegeben. Es sei $a > b$ und $b/a = v$. Dann ist der Winkel gegenüber b die Summe der Reihe

$$\beta = v \sin\gamma + \frac{v^2}{2} \sin 2\gamma + \frac{v^3}{3} \sin 3\gamma + \cdots$$

B. L. van der Waerden, Zürich.

225. Gegeben sind drei konzentrische Kreise k_1, k_2, k_3 mit den Radien $r_1 = 1$, $r_2 = 1/\sqrt{2}$, $r_3 = 1/\sqrt{3}$. Man wähle auf jedem der drei Kreise k_j je einen Punkt P_j derart, dass ein Dreieck mit maximalem Umfang entsteht.

Man zeige ferner (für beliebige Radienverhältnisse), dass die gemeinsame Kreismitte stets Inkreismittelpunkt aller Dreiecke mit maximalem Umfang ist.

R. BEREIS, Wien.

226. Die Bewegungsgruppe des ebenen quadratischen Gitters lässt sich durch die beiden Elemente A und B erzeugen, die folgenden Relationen genügen:

$$A^4 = 1, \quad B^2 = 1, \quad (AB)^4 = 1.$$

Die beiden Elemente $U = A^2B$ und $V = ABA$ erzeugen die Translationen in der x- und y-Richtung. Man zeige ohne Geometrie und ohne Matrizen rein gruppentheoretisch:

1. U und V sind vertauschbar.
2. U und V sind von unendlicher Ordnung.
3. Zwischen U und V besteht keine weitere Relation.

A. SPEISER, Basel.

Berichte

Internationaler Mathematikerkongress in Amsterdam

2. bis 9. September 1954

Die Tradition, alle vier Jahre einen internationalen Kongress der Mathematiker durchzuführen, konnte 1940 und 1944 wegen des Krieges nicht eingehalten werden. Im Jahre 1950 tagte man in Cambridge (USA.). So war der Amsterdamer Kongress der erste, der seit 1936 (Oslo) wieder in Europa stattfand. Das Organisationskomitee, unter dem Präsidium von J. A. SCHOUTEN und den Auspizien des Wiskundig Genootschap Amsterdam, hatte mehr als 60 Mathematiker zu Vorträgen eingeladen, die eine Gesamtschau vom heutigen mathematischen Schaffen vermitteln sollten. Dazu kamen mehr als 500 von Kongressisten angemeldete Kurzvorträge.

Schon die ersten Ankündigungen im Jahre 1953 machten den Eindruck, dass das Organisationskomitee zielbewusst entschlossen war, den Kongress zum Erfolg zu führen. Mehr als 1500 Mathematiker als reguläre Mitglieder mit mehreren hundert Angehörigen als begleitenden Mitgliedern haben der Einladung Folge geleistet. Fast alle Länder der Erde, auch die USSR., waren durch Delegationen vertreten. In dieser Hinsicht darf man den Veranstaltern zu dem ausserordentlichen Erfolg gratulieren. Eine der schönsten Aufgaben solcher Riesenkongresse, die Gelegenheit zu persönlichem Kontakt zu bieten, wurde vollständig erfüllt. Welche Überraschungen, welche interessanten Beobachtungen ergeben sich beim Begegnen eines Wissenschafters, von dem man vielleicht jahrelang nur seine Publikationen kannte! Allerdings war es infolge der hohen Teilnehmerzahl oft schwierig, einen bestimmten Mathematiker zu treffen.

Das Haupttraktandum der Eröffnungssitzung war die seit dem Kongress in Oslo 1936 traditionelle Verleihung der von FIELDS gestifteten Goldmedaillen, die zusammen mit einem Barpreis von je $ 1500 alle vier Jahre zwei verdienten jungen Mathematikern zuerkannt werden. H. WEYL stellte als Präsident des Fieldsmedaillen-Komitees 1954 unter allgemeiner Spannung als neue Preisträger vor: J.-P. SERRE (Frankreich) und K. KODAIRA (USA.). Seine Würdigung der tiefen Untersuchungen dieser beiden Mathematiker hatte den Charakter eines grossen Kongressvortrages. So bekam ein grosser Teil der Zuhörer, insbesondere das zahlreiche nichtmathematische Publikum, eine eindrückliche Vorstellung davon, wie sehr sich die moderne Mathematik in nur noch dem Spezialisten verständliche Einzelgebiete aufgespalten hat.