

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 10 (1955)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Ein einfacher Beweis des Satzes von Pohlke  
**Autor:** Hohenberg, Fritz  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-18075>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 05.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Während jeder gewöhnliche Evolutoidenpunkt als Zentrum einer *logarithmischen Krümmungsspirale* vom Schnittwinkel  $-\alpha$  angesehen werden kann, welche die Grundkurve  $k$  dreipunktig berührt, ist jede Evolutoidenspitze Zentrum einer vierpunktig berührenden Spirale. Rücken schliesslich zwei Spitzen zusammen (zu einem dreifachen Punkt mit vereinigten Tangenten), so wird die Schmiegs spirale sogar eine fünfpunktig berührende: Im vorliegenden Fall kann dies aus Symmetriegründen nur für  $\omega = \pm\pi/4$  und  $\pm 3\pi/4$  eintreten, also gemäss (8) für  $\operatorname{tg}\alpha = \pm 2a/b\sqrt{3(a^2 - b^2)}$ . Auf diese Weise ergibt sich übrigens eine direkte Lösung der seinerzeit von R. BEREIS gestellten Aufgabe, jene logarithmischen Spiralen zu finden, die eine vorgelegte Ellipse zum (fünfpunktig berührenden) Schmiegskegelschnitt haben<sup>1)</sup>.

Abschliessend sei erwähnt, dass sich für die Evolutoiden der *Parabel* rationale Kurven 3. Klasse und 3. Ordnung ergeben, nämlich *affine semikubische Parabeln*.

W. WUNDERLICH, Wien.

## Ein einfacher Beweis des Satzes von Pohlke<sup>2)</sup>

Man kann das Verfahren der schiefen Axonometrie als das Auftragen von Koordinaten in einem frei gewählten ebenen Dreibein erklären. Dann folgt planimetrisch, dass eine allgemeine ebene Figur affin verzerrt erscheint. Alle Lagenbeziehungen, ebenso jene Massbeziehungen, in denen die Länge der räumlichen Einheitsstrecke nicht benötigt wird, lassen sich konstruktiv behandeln, ohne dass man die Eigenschaft benützt, dass das schiefaxonometrische Bild ein Schrägriss (eine Parallelprojektion) ist. Diese Eigenschaft wird bekanntlich im Satz von POHLKE ausgedrückt. Für diesen Satz und die Konstruktion des Kugelummrisse, der Sehstrahlrichtung und des räumlichen Dreibeins wird hier eine elementare Herleitung gegeben. Es werden zwei Hilfssätze verwendet:

1. Jedes frontalaxonometrische Bild ist ein Schrägriss. Ist ein ebenes Dreibein  $U_0A_0B_0C_0$  mit  $\overline{U_0B_0} = \overline{U_0C_0}$  und  $\sphericalangle B_0U_0C_0 = 90^\circ$  gegeben, so kann ein räumliches Dreibein  $UABC$  und eine Sehstrahlrichtung  $s$  sofort angegeben werden:  $U = U_0$ ,  $B = B_0$ ,  $C = C_0$ ;  $UA$  steht auf der Bildebene normal und hat die Länge  $\overline{U_0B_0}$ ;  $s$  ist die Richtung von  $A$  nach  $A_0$ .

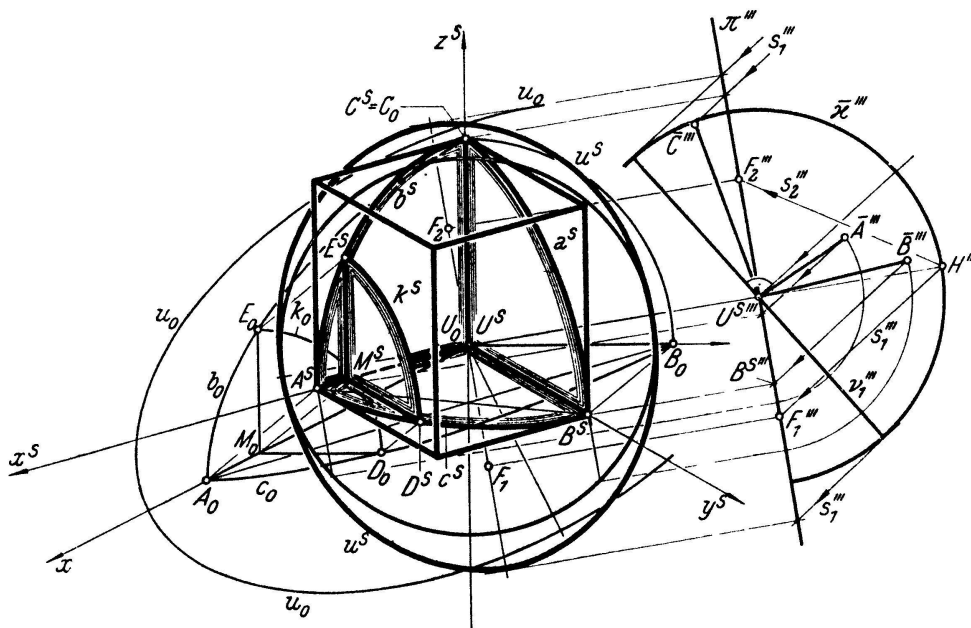
2. In der Ebene  $\pi$  seien im Innern eines Kreises  $c$  mit der Mitte  $U$  die Punkte  $P$  und  $Q$  gegeben.  $\gamma$  sei die Kugel um  $U$  durch  $c$ . Die Normalen zu  $\pi$  durch  $P$  und  $Q$  mögen  $\gamma$  in  $P_1, P_2$  bzw.  $Q_1, Q_2$  schneiden. Die Grosskreise von  $\gamma$  durch  $P_1, Q_1$  bzw.  $P_2, Q_2$  erscheinen im Normalriss auf  $\pi$  als eine Ellipse durch  $P$  und  $Q$ , die  $c$  in diametralen Punkten berührt. Die Grosskreise durch  $P_1, Q_2$  bzw.  $P_2, Q_1$  erscheinen ebenfalls als eine solche Ellipse. Bei der einen Ellipse werden  $P$  und  $Q$  durch die Berührungspunkte mit  $c$  getrennt, bei der anderen nicht. Umgekehrt kann man jede Ellipse, die  $c$  von innen in diametralen Punkten berührt, als Normalriss zweier symmetrisch zu  $\pi$  liegenden reellen Grosskreise von  $\gamma$  auffassen. Übt man auf  $c, P, Q$  noch eine Affinität aus, so folgt:

<sup>1)</sup> Aufgabe 159, El. Math. 7, 92 (1952); Auflösung ebenda 8, 91 (1953).

<sup>2)</sup> Vom Verfasser erscheint demnächst ein Buch *Konstruktive Geometrie für Techniker* (Springer-Verlag, Wien).

Es gibt zwei Ellipsen, die eine gegebene Ellipse in diametralen Punkten berühren und durch zwei gegebene Punkte im Innern gehen. Bei der einen Ellipse werden die gegebenen Punkte durch die Berührungspunkte getrennt, bei der anderen nicht.

Ein allgemeines schiefaxonometrisches Bild sei nun durch das Bild des Einheitswürfels gegeben (Figur 1).  $U^s$  sei das Bild der unsichtbaren Würfecke  $U$ ;  $UA$ ,  $UB$ ,  $UC$  seien Würfelkanten. Die Einheitskugel  $\kappa$  (Mitte  $U$ , Radius  $\overline{UA} = \overline{UB} = \overline{UC}$ ) schneidet die Koordinatenebenen in Kreisen, die als Ellipsen  $a^s, b^s, c^s$  erscheinen. Figur 1 zeigt den ersten Oktanten von  $\kappa$ ,  $B^s$  und  $C^s$  sind Endpunkte konjugierter Durchmesser von  $a^s$  usw.



Figur 1

Die Schnitkreise  $k$  von  $\kappa$  mit den zu  $[y z]$  parallelen Ebenen erscheinen als Ellipsen  $k^s$  (Mitte  $M^s$  auf  $x^s$ , Endpunkte  $D^s$  und  $E^s$  konjugierter Durchmesser auf  $c^s$  bzw.  $b^s$ ). Der gesuchte scheinbare Umriss  $u^s$  von  $\kappa$  ist offenbar die Einhüllende aller  $k^s$  in der Bildebene  $\pi$ .

Um  $u^s$  zu bestimmen, üben wir auf alle  $k^s$  eine perspektive Affinität aus;  $z^s$  sei Affinitätsachse,  $B^s$  gehe in einen Punkt  $B_0$  über, der aus  $C^s = C_0$  durch Vierteldrehung um  $U^s = U_0$  entsteht.  $A^s, D^s, E^s, b^s, c^s$  gehen dann in  $A_0, D_0, E_0, b_0, c_0$  über, und jedem  $k^s$  entspricht ein Kreis  $k_0$ . Der Hüllkurve  $u^s$  entspricht die Hüllkurve  $u_0$  aller  $k_0$ . Nach Hilfssatz 1 ist das durch  $U_0 A_0 B_0 C_0$  bestimmte frontalaxonometrische Bild ein Schrägriss. Die Kreise  $k_0$  sind die frontalaxonometrischen Bilder der Parallelkreise der Einheitskugel. Der Umriss  $u_0$  der Einheitskugel in diesem Schrägriss ist jene Ellipse, für die  $U_0$  Mitte,  $A_0$  ein Brennpunkt und  $\overline{U_0 B_0}$  die Länge der halben Nebenachse ist. Aus  $u_0$  ergibt sich durch die Affinität  $k_0 \rightarrow k^s$  eine Ellipse  $u^s$  als schiefaxonometrischer Umriss von  $\kappa$ . Den Berührungspunkten von  $c_0$  mit  $u_0$  entsprechen die Berührungspunkte von  $c^s$  mit  $u^s$ .  $A$  und  $B$  liegen auf dem sichtbaren Bogen von  $c$ .

$u^s$  habe die Brennpunkte  $F_1$  und  $F_2$ . Wir errichten die Kugel  $\bar{\kappa}$  über dem Nebenscheitelkreis von  $u^s$  (Seitenriss in Figur 1).  $H$  sei der vor  $\pi$  liegende Endpunkt des zu  $\pi$

normalen Durchmessers von  $\bar{\kappa}$ .  $s_1$  sei die Richtung von  $H$  nach  $F_1$  (in Pfeilrichtung orientiert!) und  $\nu_1$  die dazu normale Ebene durch  $U^s$ .  $\bar{\kappa}$  hat für die Sehstrahlrichtung  $s_1$  den scheinbaren Umriss  $u^s$  in  $\pi$ , der wahre Umriss liegt in  $\nu_1$ . Durch  $A^s$  und  $B^s$  werden die zu  $s_1$  parallelen Geraden gelegt und mit der in Richtung  $s_1$  sichtbaren Hälfte von  $\bar{\kappa}$  in  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$  geschnitten. Der durch  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$  gelegte Grosskreis von  $\bar{\kappa}$  liefert bei Projektion in Richtung  $s_1$  eine Ellipse in  $\pi$ , die durch  $A^s$  und  $B^s$  geht und  $u^s$  in diametralen Punkten berührt, wobei  $A^s$  und  $B^s$  von den Berührungspunkten nicht getrennt werden. Diese Ellipse ist nach Hilfssatz 2 eindeutig bestimmt und ist daher mit  $c^s$  identisch.  $c^s$  und der Grosskreis durch  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$  sind durch die Sehstrahlen affin aufeinander bezogen, und da  $A^s$  und  $B^s$  Endpunkte konjugierter Durchmesser von  $c^s$  sind, sind  $U^s\bar{A}$  und  $U^s\bar{B}$  zwei zueinander normale Radien von  $\bar{\kappa}$ <sup>1)</sup>.

Diese mit  $c^s$  durchgeführte Konstruktion lässt sich für  $a^s$  und  $b^s$  wiederholen. Man erhält so zur Sehstrahlrichtung  $s_1$  drei Punkte  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$  auf  $\bar{\kappa}$ , die mit  $U^s$  ein räumliches orthogonales Dreibein bilden. Daher ist  $\bar{\kappa}$  eine mögliche Lage der gesuchten Einheitskugel und  $U^s$ ,  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$  eine mögliche Lage des gesuchten räumlichen Dreibeins  $UABC$ . Andere Lagen gehen daraus durch Parallelverschiebung in Richtung  $s_1$  hervor. Dreht man diese Dreibeine um die Nebenachse von  $u^s$ , bis  $s_1$  in die Richtung  $s_2 \parallel [HF_2]$  gelangt, so erhält man die zur Sehstrahlrichtung  $s_2$  gehörigen Dreibeine. Sie sind mit den früheren gleichsinnig kongruent. Als Länge der Einheitsstrecke im Raum ergibt sich beide Male die Länge der halben Nebenachse von  $u^s$ .

Ist statt  $U$  die Gegenecke von  $U$  unsichtbar (Untersicht statt Übersicht), so ergeben sich zur Sehstrahlrichtung  $s_1$  Achsenkreuze, die zu den vorher gefundenen bezüglich  $\nu_1$  spiegelbildlich liegen; analog für  $s_2$ .

In gleicher Weise lässt sich der Satz von POHLKE in dem (praktisch uninteressanten) Sonderfall beweisen, dass zum Beispiel  $U^s$ ,  $B^s$ ,  $C^s$  auf einer Geraden liegen.  $A^s$  liegt dann auf  $u^s$ ,  $\bar{A}$  in  $\nu_1$  bzw.  $\nu_2$ ; die Projektion des Grosskreises durch  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$  berührt  $u^s$  in  $A^s$  und im diametralen Punkt und geht durch  $B^s$ , sie ist daher  $c^s$ .

FRITZ HOHENBERG, Graz.

## Ungelöste Probleme

**Nr. 4.** Unter der Länge eines konvexen Rotationskörpers verstehen wir die Ausdehnung des Körpers in Richtung der Achse, also den Abstand der beiden auf der Achse liegenden Pole.

Herr H. BIERI (Bern) hat verschiedene Extremalprobleme gelöst, die sich auf derartige Rotationskörper mit fest vorgeschriebener Länge beziehen. Bis heute offen geblieben sind aber beispielsweise die beiden folgenden Fragen: Welcher konvexe Rotationskörper vorgeschriebener Länge hat bei gegebenem Integral der mittleren

<sup>1)</sup> Man könnte auch auf Hilfssatz 2 verzichten und so schliessen: Durch  $u^s$  geht ein Sehstrahlenzylinder  $\zeta_u$ , der  $\kappa$  längs eines Kreises  $k$  in  $\nu_1$  berührt; durch  $c^s$  geht ein Sehstrahlenzylinder  $\zeta_c$ , der  $\zeta_u$  längs zweier Erzeugenden berührt.  $\zeta_c$  berührt  $\kappa$  in den beiden Schnittpunkten dieser Erzeugenden mit  $k$ , daher zerfällt die Schnittkurve von  $\zeta_c$  mit  $\kappa$  in zwei Kreise auf  $\kappa$ .  $c$  sei einer dieser Kreise,  $A$  und  $B$  seien die Schnittpunkte von  $c$  mit den Sehstrahlen durch  $A^s$  und  $B^s$ . Die ebenen Schnitte  $c$  und  $c^s$  von  $\zeta_u$  sind affin aufeinander bezogen, daher sind  $A$  und  $B$  Endpunkte zueinander normaler Durchmesser von  $c$ .